数理科学特論C
楕円型・放物型偏微分方程式の最大値原理

松澤　寛

0 Notations

- ここ節ではいくつかの記号を準備する．
- N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ は
$$\mathbb{R}^N := \{x = {}^t(x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \mathbb{R}\}$$
で定義され，$x = {}^t(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ のノルム $|x|$ は
$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}$$
で定義される．
- $U \subset \mathbb{R}^N$ を開集合，$u : U \to \mathbb{R}, x \in U$ とする．u の x において x_j について**偏微分可能**であるとは
$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\vec{e_i}) - u(x)}{h}$$
が存在することであり，このとき上の極限を
$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$
で表し，u の x における x_j に関する偏微分係数という．ここで $\vec{e_i}$ は x_i 方向の基本ベクトルである．
- u が各 $x \in U$ において x_j について偏微分可能であるとき
$$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$
を u の x_j に関する偏導関数といい $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ とも表す．また $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ の代わりに u_{x_j} と表すこともある．同様に $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_j x_i}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = u_{x_k x_j x_i}$ ... なども定義される．
- 非負整数を成分にもつベクトル $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ を**多重指数**という．多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ に対しては $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ で定義し，$|\alpha|$ をその多重指数の**次数**という．
- 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ に対して微分作用素 D^α を次で定義する：
$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

- 非負整数 k に対して $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}$$

と定義する．

- 特別な場合として $k = 1$ のときは $Du(x)$ はベクトル

$$Du(x) = (u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_N}(x))$$

とし，$k = 2$ のときは $D^2 u(x)$ は行列

$$D^2 u(x) = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1}(x) & \cdots & u_{x_1 x_N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_N x_1}(x) & \cdots & u_{x_N x_N}(x) \end{pmatrix}.$$

として定義する．

- $\Delta u = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ で定義し Δ を**ラプラシアン**という．

- いくつかの関数空間を定義する： $C(U)$, $C^k(U)$ を

$$C(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \ : \ u \text{ is continuous}\},$$
$$C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \ : \ D^\alpha u \in C(U) \ \text{ for } \ |\alpha| \leq k\}.$$

で定義する．また U が有界のとき

$C(\overline{U}) := \{u : \overline{U} \to \mathbb{R} \mid u$ は連続 $\}$,
$C^k(\overline{U}) := \{u \in C^k(U) \ : \ |\alpha| \leq k$ なる各 α に対し $D^\alpha u$ は $\overline{U}$ に連続に拡張できる $\}$

と定義する．

本講義における参考文献は以下のとおりである．

参考文献

[**Evans**] L. C. Evans, Partial Differential Equations, second edition, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Math. Society, Providence, 2010.

[**Friedman**] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Dover, 2008(R. E. Krieger Publishing Campany, 1983)

[**Gilberg-Trudinger**] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer Verlag, 1983.

[**Han-Lin**] Q. Han and F. Lin, Elliptic Partial Differential Equations, second edition, Courant Lecture Notes 1, American Math. Society, 2011.

[**Lam-Lou**] K-Y Lam and Yuan Lou, Introduction to Reaction-Diffusion Equations: Theory and Applications to Spatial Ecology and Evolutionary Biology, Springer, 2022.

[**Lieberman**] G. M. Lieberman, Second Order Parabolic Differential Equations, World Scientific, 1996.

[**Protter-Weinberger**] M.H. Protter and H.F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer, 1984(Prentice-Hall,, 1967)

[**Smoller**] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, second edition, Springer, 1994.

[**二宮**] 二宮広和，侵入・伝播と拡散方程式，共立出版，2014

1　調和関数

1.1　定義と平均値の性質

- 調和関数の定義がらはじめよう．

定義

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする．関数 $u \in C^2(U)$ は

$$\Delta u = 0$$

を満たすとき**調和関数**といわれる．

- 調和関数の特徴づけについて述べよう．

定義

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし $u \in C(U)$ とする．

(1) u が **第 2 平均値の性質**を満たすとは $\overline{B_r(x)} \subset U$ なる任意の $B_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \tag{1.1}$$

を満たすことである．ここで ω_N は $\mathbb{R}^N$ の単位球面積を表す．

(2) u が **第 1 平均値の性質**を満たすとは $\overline{B_r(x)} \subset U$ なる任意の $B_r(x)$ に対して

$$u(x) = \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy \tag{1.2}$$

が成り立つことである．

注意：

(1) 実は上の 2 つの性質は同値である．実際，$u \in C(U)$ が第 2 平均値の性質を満たすとすると，$\overline{B_r(x)}(\subset U)$ なる $B_r(x)$ と任意の $\rho \in [0, r]$ に対して

$$u(x)\rho^{N-1} = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS_y.$$

が成り立つ．両辺を $\rho = 0$ to $\rho = r$ まで積分すると

$$u(x)\frac{r^N}{N} = \frac{1}{\omega_N} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

となる．$B_r(x)(\subset U)$ は任意だから u は第 1 平均値の性質を満たす．

逆に $u \in C(U)$ が第 1 平均値の性質を満たすとすると $\overline{B_r(x)}(\subset U)$ なる任意の $B_r(x)$ と任意の $\rho \in (0, r)$ に対し

$$u(x)\rho^N = \frac{N}{\omega_N}\int_{B_\rho(x)} u(y)dy = \frac{N}{\omega_N}\int_0^\rho \int_{\partial B_s(x)} u(y)dS_y ds.$$

が成り立つ．両辺を微分すると

$$Nu(x)\rho^{N-1} = \frac{N}{\omega_N}\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)d\sigma_y.$$

を得る．$\rho \to r-0$ として

$$Nu(x)r^{N-1} = \frac{N}{\omega_N}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y.$$

を満たす．$B_r(x)$ は任意なので u は第 2 平均値の性質を満たす．

(2) 極座標変換 $y = x + rw$ $(w \in \partial B_1(0))$ によって (1.1) の等式は

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rw)dS_w$$

となる．極座標変換 $y = x + rz$ $(z \in B_1(0))$ によって等式 (1.2) は

$$u(x) = \frac{N}{\omega_N}\int_{B_1(0)} u(x+rz)dz.$$

と表される

定理 1.1

$u \in C^2(U)$ が調和関数であれば, 第 1 及び第 2 平均値の性質を満たす．

証明：

- u が第 1 平均値の性質を満たすことを示せばよい．
- $x \in U$ と $r > 0$ を $\overline{B_r(x)} \subset U$ なるように任意に選ぶ．$\rho \in (0, r)$ に対して $\phi(\rho)$ を

$$\phi(\rho) := \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho w)dS_w.$$

で定義する．

- $u \in C^2(U)$ より $|Du|$ は $\partial B_\rho(x)$ で有界であることに注意すると微分と積分の交換ができて

$$\begin{aligned}\phi'(\rho) &= \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{d\rho}u(x+\rho w)dS_w \\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B_1(0)} Du(x+\rho w)\cdot w dS_w \\ &= \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}}\int_{\partial B_\rho(x)} Du(y)\cdot \frac{y-x}{\rho}dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}}\int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}dS_y\end{aligned}$$

を得る．Gauss-Green の公式（後述）より

$$\frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}}\int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}dS_y = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}}\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy = 0.$$

となる．

- したがって $\phi(\rho)$ は $(0,r)$ 上で定数関数であるから

$$u(x) = \lim_{\rho\downarrow 0}\phi(\rho) = \lim_{\rho\uparrow r}\phi(\rho) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y.$$

を得る．したがって u は第 1 平均値の性質を満たす．□

注意: Gauss-Green の公式について述べる: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする．このとき，$u \in C^1(\overline{\Omega})$ に対し

$$\int_\Omega u_{x_i}dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS_x,$$

が成り立つ．ここで $\nu(=\nu(x)) = (\nu_1,\ldots,\nu_N)$ は $\partial\Omega$ の（点 $x \in \partial\Omega$ における）外向き法線ベクトルである．さらに $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ならば u を u_{x_i} に置き換えることにより

$$\int_\Omega u_{x_ix_i}dx = \int_{\partial\Omega} u_{x_i}\nu_i dS_x$$

したがって

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} Du\cdot\nu dS_x = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}dS_x.$$

を得る．

定理 1.2

$u \in C^2(U)$ が第 1 あるいは第 2（したがって両方の）平均値の性質を満たすならば u は調和関数である．

証明：

- $\Delta u \not\equiv 0$ とする．このとき $\Delta u(x) > 0$ or $\Delta u(x) < 0$ となる $x \in U$ が存在する．前者を仮定してよい．後者であれば $-u$ を考えればよい．

- $u \in C^2(U)$ より $\overline{B_r(x)} \subset U$ かつ $\Delta u > 0$ が $B_r(x)$ で成り立つような $r > 0$ が存在する．

- u は平均値の性質を満たすので，定理 1.1 の証明で用いた $\phi(\rho)$ は $\phi(\rho) = u(x)$ つまり $\phi'(\rho) = 0$ $\rho \in (0, r)$ を満たす．

- しかし，定理 1.1 の証明と同様にして

$$\phi'(\rho) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) dy > 0,$$

を得るのでこれは矛盾である．したがって u は調和関数である．□

注意: 実は $u \in C(U)$ が平均値の性質を満たすならば $u \in C^2(U)$ であり u は調和関数であることが示される (see [**Evans**], [**Han-Lin**]).

1.2 最大値原理

定理 1.3（強最大値原理）

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし $u \in C(U)$ は平均値の性質を満たすとする．もし $u(x_0) = \max_{x \in U} u(x) (=: M)$ を満たすような点 $x_0 \in U$，つまり, $u(x) \leq u(x_0)$ $(x \in U)$ を満たすような点 $x_0 \in U$ が存在するならば u は U 上の定数関数である．

証明：

- $u(x_0) = \max_{x \in U} u(x) (=: M)$ つまり $u(x) \leq u(x_0)$ $(x \in U)$ なる $x_0 \in U$ が存在すると仮定する．

- V を

$$V := \{x \in U \mid u(x) = M\}.$$

と定義する．このとき V は U の相対閉集合である．

- V は U の相対開集合であることを示そう．平均値の性質から

$$M = u(x_0) = \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq M$$

が任意の $r \in (0, \mathrm{dist}(x_0, \partial U))$ に対して成り立つ．したがって $u(x) \equiv M$ が $B_r(x_0)$ 上で成り立つ，つまり $B_r(x_0) \subset V$ が成り立つ. つまり V は相対開集合である．

- U は連結であるから $V = U$ が成り立つ．□

注意：

(1) $V \subset U$ が U の相対開集合であるとは任意の $x_0 \in V$ に対して $U_r(x_0) \cap U \subset V$ を満たす $r > 0$ が存在することである．次に $F \subset U$ が U の相対閉集合であるとは $U \setminus F$ が U の相対開集合であることである．

(2) 同様にして $u(x_0) = \min_{x \in U} u(x)(=: m)$ となる $x_0 \in U$，つまり $u(x) \geq u(x_0)$ $(x \in U)$ となる $x_0 \in U$ が存在するならば $u \equiv m$ が成り立つことを証明できる．

系 1.4（弱最大値原理）

$U \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする．$u \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ が調和関数であるならば

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

および

$$\min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x).$$

が成り立つ．

証明： 最大値に関する主張のみ証明する．

- $\overline{U} \supset \partial U$ であるから $\max_{x \in \overline{U}} u(x) \geq \max_{x \in \partial U} u(x)$ は明らかである．
- 次に $\max_{x \in \overline{U}} u(x) > \max_{x \in \partial U} u(x)$ とする．このとき $u(x_0) = \max_{x \in U} u(x)$ となる $x_0 \in U$ が存在する．しかし定理 1.3 より u は定数となり矛盾である．□

定義

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし $u \in C^2(U)$ とする．

(1) U 上 $-\Delta u \geq 0$ が成り立つとき u は U 上 **優調和関数**であるという．

(2) U 上 $-\Delta u \leq 0$ が成り立つとき u は U 上 **劣調和関数**であるという．

- 定理 1.1，定理 1.3 及び系 1.4 の証明から次のことがわかる．

命題 1.5

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし $u \in C^2(U)$ とする.

(1) u が**優調和関数**ならば $\overline{B_r(x)} \subset U$ なる任意の $B_r(x)$ に対し

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y, \quad u(x) \geq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

が成り立つ.

(2) u が**劣調和関数**ならば, $\overline{B_r(x)} \subset U$ なる任意の $B_r(x)$ に対し

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y, \quad u(x) \leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

が成り立つ.

命題 1.6（強最大値原理）

$U \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし $u \in C^2(U)$ とする.

(1) u を優調和関数とする．もし $u(x_0) = \min_{x \in U} u(x)(=: m)$ を満たす $x_0 \in U$ が存在するならば U 上 $u \equiv m$ が成り立つ.

(2) u を劣調和関数とする．もし $u(x_0) = \max_{x \in U} u(x)(=: M)$ を満たす $x_0 \in U$ が存在するならば U 上 $u \equiv M$ が成り立つ.

系 1.7（弱最大値原理）

$U \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とし $u \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ とする.

(1) u が優調和関数ならば

$$\min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x)$$

が成り立つ.

(2) u が劣調和関数ならば

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

が成り立つ.

境界値問題への応用

- ポアソン方程式の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{on } \partial U, \end{cases} \tag{1.3}$$

ここで $U \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域，$f \in C(U)$, $g \in C(\partial U)$ は与えられた関数である．

命題 1.8（一意性）

$u, v \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ はともに (1.3) の解とする．このとき U 上 $u = v$ が成り立つ.

証明： $w = u - v$ とおく．このとき w は U 上で調和関数であり ∂U 上で $w = 0$ が成り立つ．よって系 1.4 より任意の $y \in U$ に対して

$$0 = \min_{x \in \partial U} w(x) = \min_{x \in \overline{U}} w(x) \le w(y) \le \max_{x \in \overline{U}} w(x) = \max_{x \in \partial U} w(x) = 0.$$

したがって U で $u \equiv v$ が成り立つ． □

命題 1.9（比較原理）

$u_1, u_2 \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ をそれぞれ (1.3) において $f = f_i$, $g = g_i$ $(i = 1, 2)$ とした解とする．もし U 上 $f_1 \ge f_2$, ∂U 上 $g_1 \ge g_2$ を満たすならば $u_1 \ge u_2$ in U.

命題 1.10（強比較原理）

$u_1, u_2 \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ は命題 1.9 の仮定を満たすとする．このとき U 上で $u_1 \equiv u_2$ あるいは $u_1 > u_2$ のいずれかが成り立つ.

注意：

- U が**有界でない**場合，命題 1.8，1.9，1.10 は一般には成り立たない．例えば $U = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$ とし $N = 2$ のとき $u(x) = \log |x|$, $N = 3$ のとき $u(x) = |x|^{2-N} - 1$ とすると u は $f = 0$, $g = 0$ とした (1.3) の解である．しかし $v(x) \equiv 0$ も解である.