

2 外測度と Lebesgue 測度

2.1 外測度

定義

X を空でない部分集合とし, $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ が次を満たすとき, μ^* を X 上の**外測度**という.

- (1) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (2) $A \subset B$ ならば $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

問 2.1 X を空でない集合とする.

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

は外測度であることを示せ.

命題 2.1

X を空でない集合とし, $\mathcal{A}$ を有限加法族, μ を $\mathcal{A}$ 上の完全加法的集合関数とする. このとき

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathcal{A} \right\}$$

とおくと, μ^* は外測度である.

証明

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ は明らかである.

(2) $A \subset B$ とする. $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ が $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ならば $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ であるので

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

である. $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ なる $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ について下限をとれば $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ を得る.

- (3) $\{A_n\} \subset 2^X$ とする. $\mu^*(A_n) = \infty$ となる n があれば明らかであるので $\mu^*(A_n) < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 各 n に対して $E_k^{(n)} \in \mathcal{A}$ ($k = 1, 2, \dots$) があって

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} \quad \text{かつ} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

が成り立つ. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$ (可算個の和集合でおおわれている!) であるから μ^* の定義より

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ 任意より

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

を得る. $\square$

2.2 Carathéodory 可測性

定義

X を空でない集合とし, μ^* を X 上で外測度とする. $A \subset X$ が

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (\forall E \subset X)$$

が成り立つとき, **Carathéodory 可測**, **μ^* -可測**, あるいは単に**可測**という.

注 $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ であるので外測度の性質により

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

は自動的に成り立つ. よって $A \subset X$ が可測 $\Leftrightarrow$

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (\forall E \subset X)$$

である.

- $\mathcal{M}$ を次で定義しよう：

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{A \subset X : \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ (\forall E \subset X)\} \\ &= \{A \subset X : A \text{ は可測}\}\end{aligned}$$

とおく.

定理 2.2

上で定義した $\mathcal{M}$ は σ -加法族である.

証明 $\mathcal{M}$ が有限加法族の条件 (1), (2), (3) および問 1.4 の条件を満たせばよい.

有限加法族の条件 (1)

$A = X$ とすると $A^c = \emptyset$ より任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$$

したがって $X \in \mathcal{M}$ である.

有限加法族の条件 (2)

$(A^c)^c = A$ より明らかである.

有限加法族の条件 (3)

- $A, B \in \mathcal{M}$ とする. (2) より $A \cap B \in \mathcal{M}$ を示せばよい. なぜなら, $A^c, B^c \in \mathcal{M}$ より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{M}$ であり, 再び (2) から $A \cup B \in \mathcal{M}$ となるからである.
- $A \cap B \in \mathcal{M}$ を示そう. 任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (2.1)$$

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \quad (2.2)$$

が成り立つ. ここで (2.2) で E を $E \cap A$ に置き換えると

$$\mu^*(E \cap A) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)$$

よって (2.1) より

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c)\end{aligned}$$

である.

- ここで集合に関する等式

$$(A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup A^c = (A^c \cap B^c) \cup A^c$$

より

$$E \cap (A \cap B)^c = (E \cap (A \cap B^c)) \cup (E \cap A^c)$$

である. よって外測度の性質 (2) より

$$\mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$$

したがって

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$$

が成り立つ. よって $A \cap B \in \mathcal{M}$ が成り立つ.

問 1.4 の性質

- $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ とする. このとき $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ を示す.
- 任意の $E \subset X$ に対して $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ を示す. ここで

$$E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

より外測度の性質から $\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$ が成り立つ. したがって

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (\forall E \subset X) \quad (2.3)$$

を示せばよい.

- $S_k = \bigcup_{n=1}^k A_n$ とすると $S_k \subset A$ より $S_k^c \supset A^c (k = 1, 2, \dots)$ が成り立つ. したがって

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap S_k^c) \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

が成り立つ.

- 次のことを示せば十分である：任意の $E \subset X$, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^k \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_k^c) \quad (*)_k$$

実際、これが示されれば、(2.4) より、任意の $E \subset X$, $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^k \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c)$$

であるので $k \rightarrow \infty$ とすれば (2.3) を得る.

- $(*)_k$ を帰納法で示す. $k = 1$ のとき $S_1 = A_1$ より $S_1^c = A_1^c$ であり $A_1 \in \mathcal{M}$ であるから A_1 の可測性の定義式から成り立つ.
- k のとき、任意の $E \subset X$ に対して $(*)_k$ が成り立つとする. 任意の $E \subset X$ に対して $(*)_k$ の式で E を $E \cap S_k$ と置き換えれば

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap S_k) &\geq \sum_{n=1}^k \mu^*(E \cap S_k \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_k \cap S_k^c) \\ &= \sum_{n=1}^k \mu^*(E \cap A_n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

である.

- $(*)_{k+1}$ を示そう. $A_{k+1} \in \mathcal{M}$ より

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c)$$

つぎに $S_k \in \mathcal{M}$ より

$$\mu^*(E \cap A_{k+1}^c) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c)$$

である. よって

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \quad (2.6)$$

を得る.

- つぎに A_{k+1} は $A_1, \dots, A_k$ と交わらないので, $A_{k+1} \subset \left(\bigcup_{n=1}^k A_n \right)^c = S_k^c$ である

ので $S_k \subset A_{k+1}^c$ であり, $S_{k+1}^c = \bigcap_{n=1}^k A_n^c \cap A_{k+1}^c$ であるから

$$\begin{aligned}
& \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \\
&= \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap S_k) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \sum_{n=1}^k \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \quad (\because (2.5)) \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c)
\end{aligned}$$

(2.6) より

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k+1} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c)$$

となり $k+1$ のときも $(*)_{k+1}$ が成り立つ. $\square$

定理 2.3

$A \in \mathcal{M}$ に対し $\mu(A) = \mu^*(A)$ と定義すると μ は $\mathcal{M}$ 上の測度である.

証明

- $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ である.
- $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{M}$ は $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とし, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく. 定理 3.1 で示した式

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (\forall E \subset X)$$

を用いる. $E = A$ とすると

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

一方, 外測度の性質から $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ が成り立つ. $\square$

命題 2.4

X を空でない集合, μ^* を X 上の外測度とすると, 定理 2.2 および定理 2.3 で定まる σ -加法族 $\mathcal{M}$, 測度 μ に対して $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備な測度空間である.

証明

- $N \in \mathcal{M}$ とし, $M \subset N$ とする. $M \in \mathcal{M}$ を示す. 任意の $E \subset X$ に対して $E \cap M \subset E \cap N$ より $\mu^*(E \cap M) \leq \mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) = \mu(N) = 0$ である.
- 外測度の単調性により $\mu^*(E \cap M^c) \leq \mu^*(E)$ であるので

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap M^c) = \mu^*(E \cap M) + \mu^*(E \cap M^c)$$

を得る. よって $M \in \mathcal{M}$ である. 当然 $\mu(M) = 0$ である. $\square$

2.3 Hopfの拡張定理

定理 2.4

X を空でない集合, $\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族, μ_0 を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的な集合関数とする. このとき μ_0 が $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張されるための必要十分条件は μ_0 が $\mathcal{A}$ 上で完全加法的であることである. さらに X が σ -有限であるならば拡張は一意である.

証明 Step 1 : 外測度の構成

- μ_0 が $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張されるならば μ_0 は $\mathcal{A}$ で完全加法的でなければならないのは明らか.
- μ_0 が $\mathcal{A}$ で完全加法的であるとする. 命題 2.1 のように

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathcal{A} \right\}$$

とおくと μ^* は外測度となる. この外測度により定義される可測集合全体を $\mathcal{M}$ とすると定理 2.2 より $\mathcal{M}$ は σ -加法族となり, $\mu(A) = \mu^*(A)$ ($A \in \mathcal{M}$) とおくと定理 2.3 より μ は $\mathcal{M}$ 上の測度となり, 命題 2.4 より $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備測度空間となる.

Step 2 : $\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}$

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ を示す. $A \in \mathcal{M}$ とする. 任意の $E \subset X$ に対して $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ($E_n \in \mathcal{A}$) とすると

$$A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \quad A^c \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A^c \cap E_n)$$

である.

- $A \cap E_n, A^c \cap E_n \in \mathcal{A}$ で $E_n = (A \cap E_n) \cup (A^c \cap E_n)$ であるから μ_0 の有限加法性と μ^* の定義により

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A^c \cap E_n) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \end{aligned}$$

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ($E_n \in \mathcal{A}$) なる $\{E_n\}$ に関する下限をとると

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

を得る. つまり $A \in \mathcal{M}$ である. 以上より $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ を得る. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ -加法族であるから $\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}$ となる.

Step 3 : $\mu(A) = \mu_0(A)$ ($A \in \mathcal{A}$)

- 次に $\mu_0(A) = \mu^*(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) を示す. μ^* の定義から $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ は明らかである.
- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ なる $E_n \in \mathcal{A}$ を任意にとる. $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$) としてよい.
- $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)$ で $A \cap E_n \in \mathcal{A}$ より μ_0 の完全加法性と μ^* の定義より

$$\mu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

が成り立つ. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ($E_n \in \mathcal{A}$) なる $\{E_n\}$ に関する下限をとると $\mu_0(A) \leq \mu^*(A)$ を得る.

- 以上で $A \in \mathcal{M}$ に対して $\mu(A) := \mu^*(A)$ とすれば μ_0 は $\sigma[\mathcal{A}]$ 上に拡張されたことになる.

Step 4 : 拡張の一意性 λ は $\mu_0(A) = \lambda(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) を満たす $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度とする.

Step 4-1 : $\lambda(A) \leq \mu(A)$

- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ($E_n \in \mathcal{A}$) とすると

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

であるから $\{E_n\}$ に関する下限をとれば $\lambda(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$ となる.

Step 4-2 : $\mu(A) \leq \lambda(A)$

- X は σ -有限であるから, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ($X_n \in \mathcal{A}$), $\mu_0(X_n)(= \mu(X_n) = \lambda(X_n)) < \infty$ なる $\{X_n\}$ をとる. $\{X_n\}$ は単調増加としてよい.

- $A \in \sigma[\mathcal{A}]$ とすると $\lambda(B) \leq \mu(B)$ ($B \in \sigma[\mathcal{A}]$) であるから

$$\begin{aligned}\mu(X_n \cap A) + \mu(X_n \cap A^c) &= \mu(X_n) = \lambda(X_n) = \lambda(X_n \cap A) + \lambda(X_n \cap A^c) \\ &\leq \lambda(X_n \cap A) + \mu(X_n \cap A^c)\end{aligned}$$

である.

- $\mu(X_n \cap A), \mu(X_n \cap A^c) < \infty$ であるから

$$\mu(X_n \cap A) \leq \lambda(X_n \cap A)$$

を得る. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)$ で $\{X_n \cap A\}$ は単調増加であるから上の式で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\mu(A) \leq \lambda(A)$$

を得る.

よって拡張は一意である.

2.4 Lebesgue 測度の構成

- Lebesgue 測度を構成する.
- $\mathbb{R}$ の区間塊全体 $\mathcal{I}$ は有限加法族であった. $\mathcal{A}$ 上で完全加法的な集合関数 m を定義しよう.
- まず, 半開区間 $[a, b)$ に対して $m([a, b)) = b - a$ と定義する. 簡単な計算から
 - $[c, d) \subset [a, b) \Rightarrow m([c, d)) \leq m([a, b))$
 - $[a, b) \subset \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k)$ ならば $(b - a) \leq \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$

を得る.

命題 2.5

$I_k = [a_k, b_k)$ を $\mathbb{R}$ の共通部分のない半開区間の列とし, $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ は再び半開区間であるとする. このとき

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

が成り立つ.

証明

- $[a_0, b_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ とおく. 任意の n に対して

$$\sum_{k=1}^n m(I_k) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq b_0 - a_0 = m([a_0, b_0))$$

であるので $n \rightarrow \infty$ とすれば $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leq m([a_0, b_0))$

- 逆の不等式を示す. まず $-\infty < a_0 < b_0 < \infty$ の場合を示す. このとき $I_k \subset [a_0, b_0)$ より $-\infty < a_k \leq b_k < \infty$ であることに注意. $0 < \varepsilon < b_0 - a_0$ となる $\varepsilon > 0$ をとれば

$$[a_0, b_0 - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k - \varepsilon 2^{-k}, b_k)$$

を得る.

- $[a_0, b_0 - \varepsilon]$ はコンパクト集合なので, ある k_0 があって

$$[a_0, b_0 - \varepsilon] \subset [a_0, b_0 - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} (a_k - \varepsilon 2^{-k}, b_k)$$

が成り立つ.

- これより

$$m([a_0, b_0)) - \varepsilon = (b_0 - \varepsilon) - a_0 \leq \sum_{k=1}^{k_0} (b_k - a_k + \varepsilon 2^{-k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $m([a_0, b_0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ を得る.

- $a_0 = -\infty$ あるいは $b_0 = \infty$ の場合を示す. $a_0 = -\infty$. $b_0 = \infty$ のときは α_0, β_0 を $\alpha_0 < \beta_0$ なる実数とすると

$$[\alpha_0, \beta_0) = [a_0, b_0) \cap [\alpha_0, \beta_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)$$

であり, $I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)$ は半開区間であるから前の議論より

$$\beta_0 - \alpha_0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

である. $\beta_0 \rightarrow \infty, \alpha_0 \rightarrow -\infty$ とすればよい. $\square$

- 以上の準備のもとに区間塊 $I \in \mathcal{I}$ に対して $m(I)$ を定義しよう. 共通部分のない半開区間の和として $I = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k)$ と表される. このとき

$$m(I) = \sum_{k=1}^n m(I_k) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

で定義する.

- この定義が区間塊の表し方に依らないことを示そう. このとき $I = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^l [c_j, d_j)$ とする.

$$I = \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k) \cap [c_j, d_j)$$

となる. $[a_k, b_k) \cap [c_j, d_j)$ も半開区間であり $I_{k,j}$ とすると $[a_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^l I_{k,j}$ である. 命題 2.5 より $m([a_k, b_k)) = \sum_{j=1}^l m(I_{k,j})$ である. 同様に $[c_j, d_j) = \bigcup_{k=1}^n I_{k,j}$ であり $m([c_j, d_j)) = \sum_{k=1}^n m(I_{k,j})$ である. したがって

$$\sum_{k=1}^n m([a_k, b_k)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^l m(I_{k,j}) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n m(I_{k,j}) = \sum_{j=1}^l m([c_j, d_j))$$

を得る.

命題 2.6

m は区間塊のなす有限加法族 $\mathcal{I}$ 上で完全加法的である.

証明

- $A_n \in \mathcal{I}$ ($n = 1, 2, \dots$) が $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とし, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$ とすると $A = \bigcup_{i=1}^k I_i$ なる共通部分のない半開区間 I_i ($i = 1, \dots, k$) と表される. m の定義より

$$m(A) = \sum_{i=1}^k m(I_i),$$

- $A_n \in \mathcal{I}$ より, 各 n に対して $A_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} I_j^{(n)}$ なる共通部分のない半開区間 $I_j^{(n)}$ ($j = 1, \dots, k_n$) が存在する.
- $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} I_j^{(n)}$ であり $I_i = A \cap I_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} (I_j^{(n)} \cap I_i)$ である. また, $A_n \subset A$ より $A_n = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{k_n} (I_j^{(n)} \cap I_i)$
- I_i は可算個の共通部分のない半開区間 $I_j^{(n)} \cap I_i$ の和集合で表されているので命題 2.5 より

$$m(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i)$$

を得る. また m の定義より $m(A_n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i)$ が成り立つ.

- 以上より

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{i=1}^k m(I_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \end{aligned}$$

を得る. $\square$

- $\mathbb{R}$ は明らかに σ -有限であるので, Hopf の拡張定理を用いると m は $\sigma[\mathcal{I}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ へ一意に拡張される. 一般に m を用いて定義される外測度 m^* (**1次元 Lebesgue 外測度**) による可測集合を **Lebesgue 可測集合** といい, その全体を $\mathcal{M}_1$ とすると $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_1$ であることが知られている. m は **1次元 Lebesgue 測度** といわれる.
- 詳細は省くが N 次元 Lebesgue 測度も同様の手続きで定義される. $\mathbb{R}^N$ における半开区間

$$I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$$

に対して

$$m_N(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N)$$

と定義する. 次に A が $\mathbb{R}^N$ の区間塊全体 $\mathcal{I}_N$ の要素であるとき $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ と半开区間共通部分のない和集合で表されたとき

$$m_N(A) = \sum_{i=1}^n m_N(I_i)$$

と定義する. A が $\mathcal{I}_N$ 上で完全加法的であることを示せばよい. m_N を用いて定義される外測度 m_N^* (**N 次元 Lebesgue 外測度**) に関して可測な集合を **Lebesgue 可測集合** いう. その全体 $\mathcal{M}_N$ は $\mathcal{M}_N \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ であることが知られている. $\mathcal{M}_N$ 上で定義される m_N を **N 次元 Lebesgue 測度** いう.

2.5 Lebesgue 測度の性質

定理 2.7 (Lebesgue 測度の平行移動不変性)

$A \in \mathcal{M}_N$ とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$A + x =: \{y + x \mid y \in A\}$$

とすると $A + x \in \mathcal{M}_N$ であり $m_N(A + x) = m_N(A)$ である.

証明

- Lebesgue 外測度について $m_N^*(A + x) = m_N^*(A)$ ($E \subset \mathbb{R}^N$) を示せばよい.
- Lebesgue 外測度 m_N^* の定義は

$$m_N^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{I}_N (n=1, 2, \dots) \right\}$$

である.

- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n+x)$ であり, A_n+x も区間塊であり, $m_N(A_n+x) = m_N(A_n)$ である.

- よって

$$\begin{aligned} m_N^*(A+x) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n+x) \mid A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n+x, A_n \in \mathcal{I}_N (n=1,2,\dots) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{I}_N (n=1,2,\dots) \right\} \\ &= m_N^*(A) \end{aligned}$$

である.

- 次に可測性について示す. $A \in \mathcal{M}_N$ とする. 任意に $E \subset \mathbb{R}^N$ に対して $E+(-x)$ を考えると

$$m_N^*(E+(-x)) = m_N^*((E+(-x)) \cap A) + m_N^*((E+(-x)) \cap A^c)$$

である. x だけ平行移動させることにより

$$m_N^*(E) = m_N^*(E \cap (A+x)) + m_N^*(E \cap A^c)$$

を得る. したがって $A+x \in \mathcal{M}_N$ であり $m_N(A+x) = m_N(A)$ が成り立つ. $\square$

定理 2.8 (Lebesgue 測度の正則性)

$A \in \mathcal{M}_N$ とすると

$$m_N(A) = \inf \{ m_N(O) \mid A \subset O, O : \text{開集合} \} \quad (2.7)$$

$$= \sup \{ m_N(K) \mid K \subset A, K : \text{コンパクト集合} \} \quad (2.8)$$

が成り立つ.

証明 (2.7) の証明

- $\mu(A) = \infty$ ならば明らかなので $\mu(A) < \infty$ とする.
- $A \subset O$ なる任意の開集合 O に対し, 外測度の単調性から $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(O) = \mu(O)$ であるので

$$m_N(A) \leq \inf \{ m_N(O) \mid A \subset O, O : \text{開集合} \}$$

を得る.

- 逆の不等式を示すために任意の $\varepsilon > 0$ をとると, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($A_n \in \mathcal{I}_N$) があって

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \leq m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ.

- 各 A_n は有限個の半開区間 $I_1^{(n)}, \dots, I_{k_n}^{(n)}$ の和集合でかけるので, それぞれの半開区間を少し広げた開区間 $\widetilde{I_j^{(n)}}$ ($j = 1, \dots, k_n$) をとることにより

$$m_N\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} \widetilde{I_j^{(n)}}\right) \leq m_N(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

とすることができる.

- $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} \widetilde{I_j^{(n)}}$ は A を含む 1 つの開集合であり

$$\begin{aligned} m_N(O) = m_N^*(O) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_N\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} \widetilde{I_j^{(n)}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq m_N(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

を得る. したがって

$$\inf\{m_N(O) \mid A \subset O, O : \text{開集合}\} \leq m_N(A)$$

である.

(2.8) の証明

- $K \subset A$ なる任意のコンパクト集合 K に対し, 外測度の単調性から $\mu(K) = \mu^*(K) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$ であるので

$$\sup\{m_N(K) \mid K \subset A, K : \text{コンパクト集合}\} \leq m_N(A)$$

を得る.

- 逆向きの不等式を示そう. $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \leq n\}$ とする. $B_n \cap A^c$ は Lebesgue 可測集合であるから

$$m_N(B_n \cap A^c) = \inf\{m_N(O) \mid B_n \cap A^c \subset O, O : \text{開集合}\}$$

である.

- $B_n \cap A^c$ を含む任意の開集合 O に対して $K = B_n \cap O^c$ とおくと K はコンパクトであり, $K \subset B_n \cap (B_n^c \cup A) = B_n \cap A$ である. よって

$$\begin{aligned} m_N(B_n) &= m_N(K) + m_N(B_n \cap K^c) = m_N(K) + m_N(O \cap B_n) \\ m_N(B_n) - m_N(K) &= m_N(O \cap B_n) \leq m_N(O) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} m_N(O) &\geq m_N(B_n) - m_N(K) \\ &\geq m_N(B_n) - \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \cap B_n, K : \text{コンパクト集合}\} \end{aligned}$$

である. したがって

$$m_N(B_n \cap A^c) \geq m_N(B_n) - \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \cap B_n, K : \text{コンパクト集合}\}$$

を得る.

- よって

$$\begin{aligned} m_N(B_n \cap A) &= m_N(B_n) - m_N(B_n \cap A^c) \\ &\leq \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \cap B_n, K : \text{コンパクト集合}\} \\ &\leq \sup\{m_N(K) \mid K \subset A, K : \text{コンパクト集合}\} \end{aligned}$$

となる. あとは $n \rightarrow \infty$ とすればよい. $\square$

3 可測関数

3.1 可測関数の定義と性質

- 本節では Lebesgue 積分の対象となる可測関数の定義と性質について述べる.

定義

$(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ をそれぞれ可測空間とする. $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{E}$ -可測あるいは単に可測であるとは, 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことである.

命題 3.1

$(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ をそれぞれ可測空間, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ は $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}$ を満たすとする. $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{E}$ -可測であるための必要十分条件は任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことである.

証明

- f が $\mathcal{E}$ -可測であるならば任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことは明らか.
- 逆に任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つとする. このとき

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

とおくと $\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ である. さらに $\mathcal{G}$ は σ -加法族であることが示される. したがって $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}$ より $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ である. $\square$

問 3.1 上の $\mathcal{G}$ は σ -加法族であることを示せ.

- X, Y を距離空間とし, 2つの可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$, $(Y, \mathcal{B}(Y))$ を考える. X, Y の開集合全体をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ とすると $\sigma[\mathcal{O}_Y] = \mathcal{B}(Y)$ である. $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であることの必要十分条件は, 任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ であることから次のことが示される.

命題 3.2

X, Y を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき f は $\mathcal{B}(X)$ -可測である.

- $Y = \mathbb{R}$ とする. $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$, $[a, b) = [a, \infty) \cap [b, \infty)^c$ であることに注意すると $\mathcal{A} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ とすると $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{B}[\mathbb{R}]$ であることがわかる. したがって命題 3.1 より次のことがわかる.

命題 3.4

$(X, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ をそれぞれ可測空間とし $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{E}$ -可測であるための必要十分条件は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathcal{E}$$

が成り立つことである.

問 3.2 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{E}$ -可測ならば任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathcal{E}$ を証明せよ.

命題 3.5

$(X, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ をそれぞれ可測空間とし $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ が共に $\mathcal{E}$ -可測であるならば

- (1) $c \in \mathbb{R}$ に対して $(f+c)(x) := f(x) + c$ で定義される関数 $f+c$ も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (2) $c \in \mathbb{R}$ に対して $(cf)(x) := cf(x)$ で定義される関数 cf も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (3) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \in \mathcal{E}$ である.
- (4) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ で定義される関数 $f+g$ も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (5) $f^2(x) := f(x)^2$ で定義される関数 f^2 も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (6) $(fg)(x) := f(x)g(x)$ で定義される関数 fg も $\mathcal{E}$ -可測である.

証明 命題 3.4 を用いる

- (1) $a \in \mathbb{R}$ を任意にとると $\{x \in X \mid f(x) + c > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a - c\} \in \mathcal{E}$ である.
- (2) $c = 0$ ならば cf は連続関数であるので明らか. $c > 0$ とする. $a \in \mathbb{R}$ をとると $\{x \in X \mid (cf)(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a/c\} \in \mathcal{E}$ である. $c < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid (cf)(x) > a\} &= \{x \in X \mid f(x) < a/c\} \\ &= f^{-1}((-\infty, a/c)) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, (a/c) - (1/n))\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, (a/c) - (1/n))) \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

- (3) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ ある有理数 r があつて $f(x) > r$ かつ $r > g(x)$ であるから

$$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X \mid f(x) > r\} \cap \{x \in X \mid g(x) < r\}) \in \mathcal{E}$$

である. ここで $\mathbb{Q}$ は可算集合であることを用いた.

- (4) 任意に $a \in \mathbb{R}$ をとると, (1), (2), (3) より $\{x \in X \mid f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > -g(x) + a\} \in \mathcal{E}$ である.
- (5) 任意に $a \in \mathbb{R}$ をとると, $a < 0$ のときは $\{x \in X \mid f(x)^2 > a\} = X \in \mathcal{E}$ である.
 $a \geq 0$ のときは

$$\{x \in X \mid f(x)^2 > a\} = \{x \in X \mid f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X \mid f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{E}$$

である.

- (6) fg は

$$(fg)(x) = \frac{1}{4}\{(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\}$$

と表されるので (1), (2), (3), (4), (5) より fg は $\mathcal{E}$ -可測である. $\square$

- Lebesgue 積分では $+\infty$ や $-\infty$ をとる関数も考えると都合がいい. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を拡張された実数の集合とする.

定義

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{E}$ -可測であるとは, 次の (i), (ii) が成り立つことである:

- (i) $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}$
- (ii) 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つ.

- 以後, 誤解のないとき $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ などをも $\{f > a\}$ などと略記する.

命題 3.6

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{E}$ -可測であることと, 次の (i)–(iv) が成り立つことは同値である:

- (i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f \leq a\} \in \mathcal{E}$
- (ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f < a\} \in \mathcal{E}$
- (iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f \geq a\} \in \mathcal{E}$
- (iv) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f > a\} \in \mathcal{E}$

証明 可測 $\Rightarrow$ (i)

- $\{f \leq a\} = \{-\infty < f \leq a\} \cup \{f = -\infty\}$ であり, $(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるから $\{-\infty < f \leq a\} \in \mathcal{E}$ である. また, 仮定から $\{f = -\infty\} \in \mathcal{E}$ より $\{f \leq a\} \in \mathcal{E}$ である.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- $\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \leq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{E}$ より ok

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

- $\{f \geq a\} = \{f < a\}^c \in \mathcal{E}$ より ok

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

- $\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \geq a + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{E}$ より ok

(iv) $\Rightarrow$ 可測

- $\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \mathcal{E}$ である.
- $\{f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \leq -n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > -n\}^c \in \mathcal{E}$ である.
- 以上より, $f^{-1}((a, \infty)) = \{a < f < \infty\} = \{f > a\} \setminus \{f = \infty\} \in \mathcal{E}$ である.
- これより

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

は $\mathcal{A} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ を含む σ -加法族であるので $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. したがって f は可測である.

□

命題 3.7

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測であるとする. このとき

$$\begin{aligned} (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &= \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &= \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k(x), \\ (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x) \end{aligned}$$

で定義される

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

も $\mathcal{E}$ -可測である. 特に各 $x \in X$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在すれば $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ で定義される $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ も $\mathcal{E}$ -可測である.

証明

- $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \leq a \Leftrightarrow f_n(x) \leq a \ (n = 1, 2, \dots)$ より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{E}$$

である. よって命題 3.7 の (i) より $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ は $\mathcal{E}$ -可測である.

- $(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \geq a \Leftrightarrow f_n(x) \geq a \ (n = 1, 2, \dots)$ より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{E}$$

である. よって命題 3.7 の (iii) より $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ は $\mathcal{E}$ -可測である.

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ については $\sup$ に関する結果と $\inf$ に関する結果を用いればよい. $\square$

問 3.3 $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測とするとき $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{E}$ であることを示せ.

- 以上のことと, から次のことがすぐわかる.

系 3.8

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測であるとする. このとき

$$\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ が存在} \} \in \mathcal{E}$$

が成り立つ.

3.2 単関数

- 以後, 関数の定義域として可測空間 $(X, \mathcal{E})$ を固定する.

定義

$\mathcal{E}$ -可測関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はその値域が有限集合であるとき, **($\mathcal{E}$ -) 可測単関数**あるいは単に**単関数**であるという. X 上の可測単関数全体を $\mathcal{S}(X)$ で表す.

注意

- f が単関数であるとき, $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ と共通部分のない $\mathcal{E}$ -可測集合 $A_1, \dots, A_n$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

が成り立つ. ここで $\{a_1, \dots, a_n\}, \{A_1, \dots, A_n\}$ の選び方は一意的ではない.

- f, g が共に $\mathcal{E}$ -可測であるとき

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}(x)$$

と表されるとき $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j), B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$ であるから

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \chi_{A_i \cap B_j}(x), \quad g(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i \chi_{A_i \cap B_j}(x),$$

と表される. したがって f と g に現れる可測集合は同じものにとれる.

定理 3.9

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $f(x) \geq 0$ ($x \in X$) を満たす $\mathcal{E}$ -可測関数とする. このとき $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x)$ ($x \in X$) を満たす $\mathcal{E}$ -可測単関数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ($x \in X$) が成り立つ.

証明

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E_i^{(n)} = \left\{ x \in X \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n2^n),$$

$$F^{(n)} = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$$

とすると $f(x) \geq 0$ であることから $X = F^{(n)} \cup \bigcup_{i=1}^{n2^n} E_i^{(n)}$ と互いに交わらない和集合として表される.

- f は $\mathcal{E}$ -可測であるから $E_i^{(n)} \in \mathcal{F}$, $F^{(n)} \in \mathcal{E}$ が成り立つ.
- $\varphi_n(x)$ を次のように定義する:

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_i^{(n)}}(x) + n \chi_{F^{(n)}}(x)$$

この φ_n は明らかに X 上の単関数である. これが定理の条件を満たすことを示そう.

$\varphi_n(x) \leq f(x)$ であること

- $x \in X$ とする. $x \in E_i^{(n)}$ であるとき $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x)$ である. また $x \in F^{(n)}$ のとき $\varphi_n(x) = n \leq f(x)$ である.

$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ であること:

- $x \in X$ とする. $x \in E_i^{(n)}$ ならば

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) = \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}} \right)$$

であるから $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$ であるが, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2(i-1)}{2^{n+1}}$ または $\frac{2i-1}{2^{n+1}}$ であるので $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である. 次に $x \in F^{(n)}$ とする. このとき $\varphi_n(x) = n$ である. もし $x \in F^{(n+1)}$ ならば明らかに $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である.

- $x \notin F^{(n+1)}$ のときは $f(x) \geq n$ であるから $x \in \bigcup_{i=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_i^{(n+1)}$ であるので $\varphi_{n+1}(x) \geq n = \varphi_n(x)$ である.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ であること:

- まず $f(x) < \infty$ とする. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $f(x) < n$ ($n \geq n_0$) が成り立つ. 各 $n \geq n_0$ に対して $x \in E_{i_n}^{(n)}$ となる $i_n \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$ がただ1つ定まる. このとき $\frac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_n}{2^n}$ であり $\varphi_n(x) = \frac{i_n - 1}{2^n}$ であるから

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ. したがって $f(x) < \infty$ なる $x \in X$ に対しては $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ が成り立つ.

- 次に $f(x) = \infty$ とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) > n$ であるので $x \in F^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) である. このような x に対して $\varphi_n(x) = n$ であるから $f(x) \geq \varphi_n(x) = n$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ である. 以上で定理が示された. $\square$

定義

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間, $P(x)$ を X の点 x に関する命題とする. ある $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ があって命題 $P(x)$ が $x \in X \setminus N$ に対して成り立つとき, 命題 $P(x)$ は**ほとんどすべての x に対して成り立つ**あるいは**ほとんど至るところ成り立つ**といい, $P(x)$ a.e., $P(x)$ a.e. $x \in X$ などと表す.

例

- (1) $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする. $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ が存在して

$$f(x) = g(x) \quad x \in X \setminus N$$

が成り立つとき,

$$f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と表す.

- (2) $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($n = 1, 2, \dots$) を $\mathcal{E}$ -可測関数とし, ある関数 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in X \setminus N$$

が成り立つとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と表す. このとき必ずしも f は $\mathcal{E}$ -可測とは限らないことに注意する.

問 3.4 2つの $\mathcal{E}$ -可測関数 f, g に対して

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と定義するとき, $\sim$ は X 上 $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる $\mathcal{E}$ -可測関数全体における同値関係となることを示せ.