6 L^p 空間

6.1 ノルム空間としての L^p 空間

- $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．このとき $1 \leq p < \infty$ に対して

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{E}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } \mu\text{-可測で } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

とおく．まずこの $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示そう．

- $f,\, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ とすると

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

であるので $|f + g|^p$ も X 上積分可能である，つまり $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ である．定数倍については明らかである．

- 次にノルムを定めよう．$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ に対して

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.1}$$

と定義する．このとき $\|f\|$ がノルムの 3 つの条件

(N1) $\|f\| \geq 0,\, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(N2) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

(N3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

を示さなければならない．

- (N1) の前半は明らかである．次に $\|f\| = 0$ としよう．このとき

$$\int_X |f|^p d\mu = 0$$

であるから $f = 0$ a.e. $x \in X$ が成り立つ．しかし $f = 0$ とは言えない．実際 $N \subset A,\, \mu(N) = 0$ なる N の上で $f \neq 0$ であっても $\|f\| = 0$ となってしまうのである．この不都合を回避するために $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ において

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \;\; a.e. x \in X$$

と定義すると $\sim$ は同値関係になる．この同値類による商集合 $\mathcal{L}(X, \mu)/\sim$ を $L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = L^p(X, \mu)$ と定義する．f の同値類を $[f]$ で表す：

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mu) : f = g \text{ a.e. } x \in X\}$$

として

$$\|[f]\| = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義するのである．厳密には $L^p(X,\mu)$ の元は同値類であるが,「ほとんど至るという等しい関数は同じ関数とみなす」というルールで進めていき，$\|[f]\|$ を $\|f\|_p$ と表すことにする．そうすれば $\|f\| = 0$ であれば f は 0 という関数と同一視できるので $f = 0$ とみなすことにより (N1) が成り立つことがわかる．

- 次に (N2) を示す．$\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p$$

を得る．

- 次に (N3) であるが，$p = 1$ のときは三角不等式 $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ から明らかである．$p > 1$ についてはいくつかの準備が必要である．

補題 6.1(Young の不等式)

$p,\, p' > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ を満たす数とする．このとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (a, b \geq 0)$$

が成り立つ．

証明

- $ab = 0$ のときは明らかなので $ab > 0$ とする．
- まず

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} \quad (x \geq 0) \tag{6.2}$$

が成り立つことを示す．そのためには

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} - x$$

とおいて増減表を書けばわかる（演習）．

- (6.2) において $x = ab^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$ab^{-\alpha} \leq \frac{a^p b^{-p\alpha}}{p} + \frac{1}{p'}$$

- 上式両辺に $b^{1+\alpha}>0$ をかけると

$$ab \leq \frac{a^p b^{1+\alpha-p\alpha}}{p}+\frac{b^{1+\alpha}}{p'}$$

- ここで $1+\alpha=p'$ とおくと $(1/p)+(1/p')=1$ より $p=(\alpha+1)/\alpha$ つまり $\alpha+1-p\alpha=0$．したがって

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}$$

が成り立つ．□

命題 6.2(Hölder の不等式)

$p,\,p'>1$ は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ を満たす数とする．$f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $g\in\mathcal{L}^{p'}(X,\mu)$ とすると

$$\int_X |fg|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

が成り立つ．

証明

- $\alpha=\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $\beta=\left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$ とおく．
- $\alpha=0$ ならば $f=0$ (a.e. $x\in X$) であり $\beta=0$ ならば $g=0$ (a.e. $x\in X$) であるから，$\alpha=0$ または $\beta=0$ のときは明らか．よって $\alpha\neq 0$ かつ $\beta\neq 0$ とする．
- Young の不等式において $a=\dfrac{|f|}{\alpha}$, $b=\dfrac{|g|}{\beta}$ とおくと

$$\frac{|fg|}{\alpha\beta} \leq \frac{|f|^p}{p\alpha^p}+\frac{|g|^{p'}}{p'\beta^{p'}}$$

である．$|f|^p$, $|g|^{p'}$ は積分可能であるから $|fg|$ も積分可能であり

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_X |fg|d\mu \leq \frac{1}{p\alpha^p}\left(\int_X |f|^p d\mu\right)+\frac{1}{p'\beta^{p'}}\left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

よって

$$\int_X |fg|d\mu \leq \alpha\beta=\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

が得られる．□

命題 6.3(Minkowski の不等式)

p は $1 \leq p < \infty$ を満たす数，$f,\ g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ とするとき

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ.

証明

- $p = 1$ のときは三角不等式 $|f+g| \leq |f| + |g|$ から明らかであるので $p > 1$ とする．このとき $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ となる $p' > 1$ が存在する．実際 $p' = \dfrac{p}{p-1}$ である.
- また $\displaystyle\int_X |f+g|^p d\mu = 0$ のときは明らかなので $\displaystyle\int_X |f+g|^p > 0$ とする.
- まず

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \tag{6.3}$$

- ここで $h = |f+g|^{p-1}$ とすると

$$|h|^{p'} = |f+g|^{p'(p-1)} = |f+g|^p$$

  であるので $\displaystyle\int_X |h|^{p'} d\mu < \infty$ である．ここで $f,\ g \in L^p(X,\mu)$ ならば $f+g \in L^p(X,\mu)$ であることを用いた.
- Hölder の不等式より

$$\int_X |f||h| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |h|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

  同様に

$$\int_X |g||h| d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |h|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

- $\dfrac{1}{p'} = 1 - \dfrac{1}{p}$ に注意して (6.3) より

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left\{ \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

- 両辺を $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} > 0$ で割ると

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．□

6.2 Banach 空間としての L^p 空間

定理 6.4

$1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(X,\mu)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとして Banach 空間となる．

証明

- $\{f_n\}$ を $L^p(X,\mu)$ の Cauchy 列とする：任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4}$$

が成り立つ．

- ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$$

- 次に $n_2 > n_1$ なるある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$$

が成り立つ．

- このように $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ なる自然数の列 $\{n_k\}$ が存在し

$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^k}$$

が成り立つ．特に $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \dfrac{1}{2^k}$ が成り立つ．

- $g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ とおく．$|f_{n_1}| \in L^p(X,\mu)$, $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p(X,\mu)$ より $g_k \in L^p(X,\mu)$ であり，

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$$

が成り立つ．また

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \cdots$$

が成り立つので $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は各 $x \in X$ に対して存在する．

- 単調収束定理より

$$\int_X |g|^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X |g_k|^p d\mu,$$
$$\|g\|_p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$$

を得る．したがって $|g(x)|^p$ つまり $|g(x)|$ は $|g(x)| < \infty$ a.e. $x \in X$ を満たす．さらに $g \in L^p(X,\mu)$ である．

- $\lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ は a.e. $x \in X$ で存在するので $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ は a.e. $x \in X$ に対して絶対収束することになる．つまり a.e. $x \in X$ に対して $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ が存在する（収束しない場所では $f(x) = 0$ とすればよい）．このとき f は μ-可測である．さらに

$$|f_{n_k}(x)| \leq g_k(x) \leq g(x)$$

そして $|f(x)| \leq g(x)$ (a.a. $x \in X$) が成り立つ．よって

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2g(x)$$

が成り立つ．

- Lebesgue の収束定理により

$$\int_X |f(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu = 0 \quad \text{つまり} \quad \lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$$

が成り立つ．これより $\varepsilon > 0$ にある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \|f - f_{n_k}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるからある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $m, n \geq n_0$ ならば (6.4) が成り立つ．ここで $k \geq k_0$ を $n_k \geq n_0$ となるようにとれば $n \geq n_0$ ならば

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ を意味する． □

- 以上の証明から次のことがわかる．

命題 6.5

$1 \le p < \infty$ とする．$\{f_n\}$ を $L^p(X,\mu)$ における Cauchy 列とする．このとき，$f \in L^p(X,\mu)$ が存在して

(1) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

が成り立つ．さらに ある $h \in L^p(X,\mu)$ と部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在して

(2) $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ a.e $x \in X$

(3) $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$ a.e $x \in X$

が成り立つ．

- $p = 2$ のとき，$f, g \in L^2(X,\mu)$ に対して

$$(f, g) = \int_X fg d\mu \tag{6.5}$$

とおくと，$(\cdot,\cdot)$ は内積の条件 (IP1)–(IP4) を満たす．さらに内積から導かれるノルムは $\|\cdot\|_2$ でありこのノルムに関して完備であるから次のことが従う：

命題 2.6

$L^2(X,\mu)$ は (6.5) を内積として Hilbert 空間となる．

6.3 L^∞ 空間

- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を X 上の可測関数とする．ある $M \in \mathbb{R}$ があって

$$f(x) \le M \quad \text{a.e.} x \in X$$

が成り立つとき f は**本質的に上に有界**であるといい

$$\inf\{M : f(x) \le M \ \ \text{a.e.} x \in A\}$$

を f の**本質的上限**といい $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} f(x)$ あるいは $\operatorname*{ess\,sup}_{A} f$ と表す．**本質的に下に有界**，**本質的下限** $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} f(x)$, $\operatorname*{ess\,inf}_{A} f$ も同様に定義される．

- V を

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } \mu\text{-可測で } \operatorname*{ess\,sup}_{A} |f| < \infty\}$$

とおく．$\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ において $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の定義で述べた同値関係 $\sim$ を考え，商集合 $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\sim$ を $L^\infty(X,\mu)$ と表し，$[f]\in L^\infty(X,\mu)$ に対し

$$\|[f]\| = \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \tag{6.6}$$

で定義する．以後，$f=g$ a.e. $x\in X$ である関数は同一視するという約束の下，$L^\infty(X,\mu)$ の元を f で表し，$\|[f]\|$ を $\|f\|_\infty$ と表す．定義から

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \quad \text{a.e. } x\in X$$

が成り立つ．実際，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対してある $N_n\subset X$ かつ $\mu(N_n)=0$ なる $N_n\in\mathcal{M}$ が存在して

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \ \ x\in X\cap N_n^c$$

が成り立つ． $N=\bigcup_{n=1}^\infty N_n$ とすると $\mu(N)=0$ であり

$$x\in X\cap N^c \quad \Rightarrow \quad |f(x)|\le \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \ \ {}^\forall n\in\mathbb{N}$$

を得る．$n\to\infty$ とすればよい．

- $\|f\|_\infty$ がノルムの条件 (N1), (N2), (N3) を満たすことを見よう．
- (N1) は明らか．
- (N2) を示す．$\alpha=0$ ならば明らかである．$\alpha\neq 0$ とする．このとき

  $$|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| \le |\alpha|\|f\|_\infty \ \ \text{a.e. } x\in X$$

  である．よって $\|\alpha f\|_\infty \le |\alpha|\|f\|_\infty$ が成り立つ．逆に $|f| = \left|\frac{1}{\alpha}\alpha f\right|$ であるから先に示したことから

  $$\|f\|_\infty \le \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha f\|_\infty$$

  つまり $|\alpha|\|f\|_\infty \le \|\alpha f\|_\infty$ を得る．
- (N3) を示す．$f,g\in L^\infty(X,\mu)$ とする．このとき $N_1,N_2\subset A$, $\mu(N_1)=\mu(N_2)=0$ なる N_1, $N_2\in\mathcal{M}$ が存在して

  $$|f(x)|\le\|f\|_\infty \ \ x\in X\cap N_1^c,$$
  $$|g(x)|\le\|g\|_\infty \ \ x\in X\cap N_2^c$$

  を得る．$N=N_1\cup N_2$ とすると $\mu(N)=0$ であり $x\in X\cap N^c$ ならば

  $$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

  よって $\|f+g\|\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ を得る．

定理 6.7

$L^\infty(X,\mu)$ は $|\cdot\|_\infty$ をノルムとして Banach 空間となる．

証明

- $\{f_n\}$ を $L^\infty(X,\mu)$ の Cauchy 列とする：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

- $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k}$$
が成り立つ．このことから，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して，m, $n \geq n_k$ に対して $\mu(N_{k,m,n}) = 0$ なる $N_{k,m,n} \subset A$ が存在して
$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^k} \quad x \in X \cap N_{k,m,n}^c$$
が成り立つ．

- $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m,n\geq n_k} N_{k,m,n}$ とすれば $\mu(N) = 0$ であり，任意の $x \in X \cap N^c$, $k \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_k$ に対して
$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$
が成り立つ．任意に $\varepsilon > 0$ をとれば $\dfrac{1}{2^k} < \varepsilon$ となる k が定まり，そこから n_k が定まり，
$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in X \cap N^c) \tag{6.7}$$
が成り立つ．これは，任意の $x \in X \cap N^c$ に対して実数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることを意味する．

- したがって各 $x \in A \cap N^c$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定まる（$x \in N$ に対しては $f(x) = 0$ とする）．(6.7) で $m \to \infty$ とすれば
$$n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in X \cap N^c) \tag{6.8}$$
が成り立つ．このとき
$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x)| \leq \varepsilon + \|f_{n_k}\| \quad (x \in X \cap N^c) \quad \text{つまり a.e. } x \in X$$
である．よって $f \in L^\infty(X,\mu)$ である．また (6.8) より $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ もわかる．□

- 命題 6.2 の系として次を得る：

命題 6.8(Hölder の不等式)

$1 \le p, p' \le \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ を満たすとする．ただし $\dfrac{1}{\infty} = 0$ とする．$f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^{p'}(X, \mu)$ とすると

$$\int_X |fg| d\mu \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

が成り立つ.

6.4 Lebesgue 空間の性質と変分法の基本補題

- ここでは Lebesgue 空間のいくつかの性質について証明なしで述べる.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$C(\Omega)$ を Ω で連続な関数とする．$f \in C(\Omega)$ に対して

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

  の $\mathbb{R}^N$ における閉包を f の**台**といい，$\mathrm{supp} f$ と表す．さらに

$$\{f \in C(\Omega) \mid \mathrm{supp} f \subset \Omega \text{ で } \mathrm{supp} f \text{ は有界閉集合}\}$$

  $C_c(\Omega)$ と表す.

- 以後，m を Lebesgue 測度とし，測度空間を $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m)$ としたときの L^p 空間を $L^p(\Omega)$ と表し，$f(x)$ の積分について dm を dx と表す.
- 次の 2 つのことが知られている：

定理 6.9

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合，m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度，$1 \le p < \infty$ であるとき $C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ において稠密である.

定理 6.10

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合，m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度，$1 \le p < \infty$ とする．このとき $L^p(\Omega)$ は可分である.

- 定理 6.9 を用いると次のことがわかる.

定理 6.11

$1 \le p < \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ とする．

$$\lim_{|h|\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つ．

証明

Step 1: $\boldsymbol{f \in C_c(\mathbb{R}^N)}$ の場合

- $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ とすると $K := \operatorname{supp} f$ は $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合である．

  $$K_1 := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, K) \le 1\}$$

  とおくと K_1 も $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合である．

- $|h| \le 1$ とすると $\operatorname{supp}(f(\cdot+h) - f(\cdot)) \subset K_1$ であり，f は K_1 で一様連続である．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとると，f の一様連続性からある $0 < \delta < 1$ があって

  $$x \in K, |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon^{1/p}}{(m(K_1)+1)^{1/p}}$$

  が成り立つ．よって $|h| < \delta$ ならば

  $$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \int_{K_1} |f(x+h) - f(x)|^p dx \le \varepsilon$$

  を得る．Step 1 終了

Step 2: $\boldsymbol{f \in L^p(\mathbb{R}^N)}$ の場合

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると，定理 2.9 より，

  $$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

  を満たす $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ が存在する．

- 次に三角不等式と Lebesgue 測度の平行移動不変性により

  $$\begin{aligned}\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p &\le \|f(\cdot+h) - g(\cdot+h)\|_p + \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_p + \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p \\ &\le \varepsilon + \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p\end{aligned}$$

  Step 1 より $\lim_{h\to 0} \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p = 0$ であるから

  $$\limsup_{|h|\to 0} \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le \varepsilon$$

  を得る．

- $\varepsilon > 0$ は任意より，Step 2 は終了し，証明が完了する．□

定理 6.12

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合，m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度，$1 \le p < \infty$ とし，$f \in L^p(\Omega)$ とする．

$$\int_\Omega f\varphi dx = 0 \quad ({}^\forall \varphi \in C_c(\Omega))$$

が成り立つならば $f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が成り立つ．

証明

Step 1: $1 < p < \infty$ の場合

- $f \in L^p(\Omega)$ と $p' = p/(p-1)$ より $|f|^{p-2}f \in L^{p'}(\Omega)$ である．定理 2.9 より
$$\varphi_n \to |f|^{p-2}f \quad (n \to \infty) \quad \text{in} \quad L^{p'}(\Omega) \tag{6.9}$$
となる $\{\varphi_n\} \subset C_c(\Omega)$ が存在する．

- 仮定から
$$\int_\Omega f\varphi_n dx = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$
が成り立つ．

- 一方，Hölder の不等式より
$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f\varphi_n dx - \int_\Omega |f|^p dx\right| &= \left|\int_\Omega f(\varphi_n - |f|^{p-2}f)dx\right| \\ &\le \|f\|_p \|\varphi_n - |f|^{p-2}f\|_{p'} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned} \tag{6.10}$$
を得る．

- 以上 (6.9), (6.10) より
$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\varphi_n dx = \int_\Omega |f|^p dx$$
つまり $f = 0$ a.e. $x \in \Omega$

Step 2: $p = 1$ の場合

- $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ を
$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid |x| < n, \quad \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > 1/n\}$$
とおくと，Ω_n は有界開集合で，$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ が成り立つ．

- Ω_n は有界開集合なので $f \in L^q(\Omega_n)$ $1 < q < \infty$ である（確かめよ）.
- 仮定から任意の $\varphi \in C_c(\Omega_n)(\subset C_c(\Omega))$ に対して

$$\int_{\Omega_n} f\varphi dx = 0$$

  が成り立つ.
- 前半より $f = 0$ a.e. $x \in \Omega_n$ である．以上より $f = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が成り立つ．□
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とする．$\overline{\omega} \subset \Omega$ となる任意の有界開集合 ω に対して $f \in L^p(\omega)$ となるような関数全体を $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と表す．変分法の基本補題は $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して成り立つ.