5　収束定理

- ここでは関数列 $\{f_n\}$ の積分において積分記号と $\lim\limits_{n\to\infty}$ の交換が比較的に緩い条件で行えることを学ぶ．すでに学んだ単調収束定理はその 1 つである．

命題 5.1(Fatou の補題)

$f_n : X \to [0,\infty]$ $(n=1,2,\cdots)$ を $\mathcal{E}$-可測関数とし，$f(x) = (\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(x)$ とおく．このとき

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

が成り立つ．

証明

- $g_n(x) = \inf\limits_{k\ge n} f_k(x)$ とおくと $0 \le g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ が全ての $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$ に対して成り立ち，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ である．
- 単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu$$

を得る．

- また $k \ge n$ に対し $g_n(x) \le f_k(x)$ $(x\in X)$ が成り立つので

$$\int_X g_n d\mu \le \int_X f_k d\mu \quad (k\ge n) \ \text{つまり} \quad \int_X g_n d\mu \le \inf_{k\ge n}\int_X f_k d\mu$$

である．

- したがって

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu \le \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}\int_X f_k d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

を得る．□

問 5.1 $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n=1,2,\cdots)$ を $\mathcal{E}$-可測関数とし，$f(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x)$ とおく．ある $M \ge 0$ に対して

$$\int_X f_n d\mu \le M \quad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つならば

$$\int_X f d\mu \le M$$

が成り立つことを証明せよ．

定理 5.2(Lebesgue の収束定理)

$f_n : X \to [0, \infty]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を$\mathcal{E}$-可測関数とし，各点で収束するとする．$f(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)$ とおく．もし

$$|f_n(x)| \le g(x)$$

なる可積分関数 g が存在すれば f も可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ．さらに

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

が成り立つ．

証明

- 条件から各 f_n は可積分関数である．$|f_n(x)| \le g(x)$ で $n \to \infty$ とすると $|f(x)| \le g(x)$ を得るので f も可積分関数である．

- まず　$0 \le g(x) < \infty$ $(x \in X)$ の場合に示そう．このとき f_n, f も有限値であり $g + f_n \ge 0$ であるから Fatou の補題により

$$\begin{aligned}
\int_X g d\mu + \int_X f d\mu = \int_X (g+f) d\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g + f_n) d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X g d\mu + \int_X f_n d\mu \right) \\
&= \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu
\end{aligned}$$

である．$\displaystyle\int_X g d\mu < \infty$ より

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

を得る．

- 次に $g-f_n \geq 0,\ g-f \geq 0$ であることと $g,\ f_n,\ f$ が有限値であることから

$$
\begin{aligned}
\int_X g d\mu - \int_X f d\mu = \int_X (g-f) d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g-f_n) d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu \right) \\
&= \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu
\end{aligned}
$$

同じく $\displaystyle\int_X g d\mu < \infty$ より

$$
\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu
$$

を得る．

- 以上より

$$
\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu
$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ を得る．

- 次に $g : X \to [0, \infty]$ の場合を示そう．g は可積分なので $N = \{x \in X \mid g(x) = \infty\}$ は零集合である．さらに

$$
\begin{aligned}
&f_n(x) = f_n(x)\chi_{X\setminus N}(x) \ \ \text{a.e.} \ \ x \in X, \quad f(x) = f(x)\chi_{X\setminus N}(x) \ \ \text{a.e.} \ \ x \in X, \\
&\lim_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{X\setminus N}(x) = f(x)\chi_{X\setminus N}(x) \ \ x \in X, \\
&|f_n\chi_{X\setminus N}(x)| \leq g(x)\chi_{X\setminus N}(x) \ \ (x \in X)
\end{aligned}
$$

が成り立つので（当然 $g\chi_{X\setminus N}$ は可積分）であるから g が有限値の場合より

$$
\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \chi_{X\setminus N} d\mu = \int_X f\chi_{X\setminus N} d\mu = \int_X f d\mu
$$

以上で示された．□

系 5.3(有界収束定理)

$\mu(X) < \infty$ $f_n : X \to [0, \infty]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を$\mathcal{E}$-可測関数とし，各点で収束するとする． $f(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)$ とおく．もし，ある定数 $M > 0$ が存在して

$$|f_n(x)| \le M$$

が成り立てば f も可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

証明 $\mu(X) < \infty$ より $g(x) = M$ は可積分関数である．□

命題 5.4

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間，(Y, d) を距離空間とし，$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ は次を満たすとする：

(i) 各 $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{E}$-可測関数

(ii) 各 $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ は $y_0 \in Y$ で連続

(iii) ある可積分関数 g が存在して次が成り立つ：

$$|f(x, y)| \le g(x) \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

このとき

$$F(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

は $y_0 \in Y$ において連続である.

証明

- $\{y_n\}$ を y_0 に収束する任意の点列とし $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(y_0)$ を示せばよい.
- $f_n(x) = f(x, y_n)$ とおくと f_n は $\mathcal{E}$-可測関数で，各 $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ y_0 で連続であるから，次が成り立つ：
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x, y_0), \ |f_n(x)| \le g(x)$$
- したがって Lebesgue の収束定理より
$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x, y_n) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f(x, y_0) d\mu(x) = F(y_0)$$
を得る．□

命題 5.5

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間，$f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ は次を満たすとする：

(i) 各 $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ は 可積分

(ii) 各 $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ は (a, b) で微分可能

(iii) ある可積分関数 g が存在して次が成り立つ：

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq g(x) \quad ((x, y) \in X \times (a, b))$$

このとき

$$F(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

は (a, b) で微分可能で次が成り立つ：

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$$

証明

- まず $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ は $\mathcal{E}$-可測関数であることに注意する．実際

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{n \to \infty} n \left\{ f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y) \right\}$$

として与えられるからである．

- F は $y_0 \in (a, b)$ で微分可能で

$$F'(y_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x)$$

を示せばよい．そのためには $y_0 \in Y$ に収束する (a, b) の任意の点列 $\{y_n\}$ $(y_n \neq y_0)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(y_n) - F(y_0)}{y_n - y_0} = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x)$$

を示せばよい．

- 計算により

$$\frac{F(y_n) - F(y_0)}{y_n - y_0} = \int_X \frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0} d\mu(x)$$

である． $f_n(x) = \int_X \frac{f(x,y_n) - f(x,y_0)}{y_n - y_0}$ とおくと

$$\frac{F(y_n) - F(y_0)}{y_n - y_0} = \int_X f_n(x) d\mu$$

である．ここで $\{f_n\}$ は $\mathcal{E}$-可測関数で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$$

であり，さらに平均値の定理よりある $\theta \in (0,1)$ があって

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y_n - y_0)) \right| \leq g(x)$$

が成り立つ．

- したがって Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(y_n) - F(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x)$$

を得る．□