

4 可測関数の積分

4.1 非負値単関数の積分

- 可測関数の積分を定義するにあたり、まず単関数の積分を定義しよう.

$$\mathcal{S}_+(X) = \{f : X \rightarrow [0, \infty] \mid f \in \mathcal{S}(X)\}$$

とおく.

定義

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする. $f \in \mathcal{S}_+(X)$ が相異なる $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty]$ と共通部分のない $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ に対して

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

と表されるとき

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

と定義する. ただし $0 \cdot \infty = 0$ と定める. このとき

$$\int_X f(x) d\mu(x)$$

を f の X 上の測度 μ に関する積分という.

注 f が

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}(x)$$

と表されるとき $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$

$$A_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow a_i = b_j$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)
 \end{aligned}$$

となるので f の表現方法によらず $\int_X f(x) d\mu(x)$ が定まる. また

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu$$

とも表す.

- 以後, 測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を固定する.

命題 4.1

$f, g \in \mathcal{S}_+(X)$, $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ のとき

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

が成り立つ.

証明

- 前節の注により f, g は共通の共通部分のなく $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ なる $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ を用いて

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad g(x) = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{A_i}(x)$$

と表される.

- このとき

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) \chi_{A_i}(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n b_i \mu(A_i) \\ &= \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu\end{aligned}$$

を得る. $\square$

4.2 分布関数

定義

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする. このとき任意の $t \geq 0$ に対して $\{x \in X \mid f(x) > t\} \in \mathcal{E}$ より

$$M_f(t) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\})$$

とおく. M_f を f の**分布関数**という.

命題 4.2

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数, M_f をその分布関数とする. このとき次が成り立つ.

- (1) M_f は単調非増加関数である.
- (2) $\mu(X) < \infty$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} M_f(t) = \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\})$

証明

- (1) $t_1 < t_2 \Rightarrow \{x \in X \mid f(x) > t_2\} \subset \{x \in X \mid f(x) > t_1\}$ であるので測度の単調性により

$$M_f(t_2) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > t_2\}) \leq \mu(\{x \in X \mid f(x) > t_1\}) = M_f(t_1)$$

を得る.

- (2) 単調性より $\lim_{t \rightarrow \infty} M_f(t)$ は存在する. $E_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ とすると $\{E_n\}$ は単調減少列で $\mu(E_1) \leq \mu(X_1) < \infty$ である. さらに

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

であるので命題 1.5 より

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_f(n)$$

を得る. $\square$

命題 4.3

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数, M_f をその分布関数とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $t_0 \geq 0$ に対して $\lim_{t \rightarrow t_0+0} M_f(t) = M_f(t_0)$, つまり M_f は右連続である.

(2) $\mu(X) < \infty$ ならば任意の $t_0 > 0$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} M_f(t) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq t_0\})$$

が成り立つ.

証明 まず, M_f が単調非増加であるから, 各 $t_0 \geq 0$ に対して M_f は t_0 で右極限をもち, 各 $t_0 \geq 0$ に対して M_f は t_0 で左極限をもつことに注意する.

(1) $E_n = \left\{x \in X \mid f_n(x) > t_0 + \frac{1}{n}\right\}$ とおくと $\{E_n\}$ は単調増加列であり

$$\{x \in X \mid f(x) > t_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

が成り立つ. したがって命題 1.4 と右極限が存在することより

$$M_f(t_0) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > t_0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} M_f(t)$$

が成り立つ.

(2) $F_n = \left\{x \in X \mid f(x) > t_0 - \frac{1}{n}\right\}$ とすると, $\{F_n\}$ は単調減少列であり

$$\{x \in X \mid f(x) \geq t_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

である. $\mu(F_1) \leq \mu(X) < \infty$ より命題 1.5 と左極限が存在することから

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} M_f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_f\left(t_0 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq t_0\})$$

を得る. $\square$

例 $f \in \mathcal{S}_+(X)$ が

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \tag{4.1}$$

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = a \leq \infty$$

と表されているとする. このとき $M_f(t)$ は以下のようなになる

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) &= M_f(0) & (0 \leq t < a_1), \\
\mu(A_2) + \mu(A_3) + \cdots + \mu(A_n) &= M_f(a_1) & (a_1 \leq t < a_2) \\
&\vdots \\
\mu(A_i) + \mu(A_{i+1}) + \cdots + \mu(A_n) &= M_f(a_{i-1}) & (a_{i-1} \leq t < a_i) \\
&\vdots \\
\mu(A_n) &= M_f(a_{n-1}) & (a_{n-1} \leq t < a_n = a) \\
0 &= M_f(a) & (t \geq a)
\end{aligned}$$

つまり,

$$M_f(t) = \sum_{i=1}^n M_f(a_{i-1}) \chi_{[a_{i-1}, a_i)}(t) \quad (4.2)$$

と表され, $M_f(t)$ も単関数となる. $\mu(A_i) = \mu(\{f = a_i\}) = M_f(a_{i-1}) - M_f(a_i)$ であるので $M_f(a_n) = 0$, $a_0 = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i (M_f(a_{i-1}) - M_f(a_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i M_f(a_{i-1}) - \sum_{i=1}^n a_i M_f(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i M_f(a_{i-1}) - \sum_{i=1}^n a_{i-1} M_f(a_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n M_f(a_{i-1}) (a_i - a_{i-1}) \\
&= \int_{[0, \infty)} M_f(t) dm
\end{aligned}$$

である. m は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である.

4.3 Archimedes 積分

- 先の例で見たように, 非負値単関数 f の積分は分布関数 M_f が単関数であることを通して M_f の $[0, \infty)$ 上の積分と一致することをみた. より一般に非負値可測関数の積分もその分布関数の積分として定義したい. そこで Archimedes 積分を導入する.
- Σ を $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < \infty$ なる点の組 $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ の集合とする.

- $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ を単調非増加関数とする. このとき $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \in \Sigma$ に対し

$$I_F(\sigma) = \sum_{i=1}^n F(t_i - 0)(t_i - t_{i-1})$$

と定める.

定義

$F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ を単調非増加関数とするととき, F の Archimedes 積分 $\int_0^\infty F(t)dt$ を

$$\int_0^\infty F(t)dt = \sup\{I_F(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$$

で定義する.

問 4.1

- (1) $F, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ が単調非増加で $F(t) \leq G(t)$ を満たすならば

$$\int_0^\infty F(t)dt \leq \int_0^\infty G(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ が $\sigma \subset \sigma'$ ならば $I_F(\sigma) \leq I_F(\sigma')$ であることを示せ. (Hint: σ に 1 点加える多ものを σ' として考えれば十分である).

- (3) $F(t) = 0$ ($t > 0$) ならば $\int_0^\infty F(t)dt = 0$ が成り立つことを示せ.

命題 4.4

$F_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) を単調非増加関数で $F_n(t) \leq F_{n+1}(t)$ がすべての $n \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)$ に対して満たすとする. $F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$ とするとき (F も明らかに単調非増加で)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_n(t)dt = \int_0^\infty F(t)dt$$

が成り立つ.

証明

- $F_n(t) \leq F_{n+1}(t) \leq F(t)$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_n(t) dt \leq \int_0^\infty F(t) dt$$

が成り立つ.

- 逆向きの不等式を示す. $L \in \mathbb{R}$ を $L < \int_0^\infty F(t) dt$ なる任意の数とすると $\sup$ の定義から $t_0 < t_1 < \cdots < t_N < \infty$ なる $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \in \Sigma$ が存在して

$$L < \sum_{i=1}^N F(t_i - 0)(t_i - t_{i-1})$$

が成り立つ.

- $0 < \varepsilon < \min\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \dots, N\}$ に対して

$$t_0^\varepsilon = 0, \quad t_i^\varepsilon = t_i - \varepsilon \quad (i = 1, \dots, N)$$

とおき, $\sigma^\varepsilon = \{t_0^\varepsilon, t_1^\varepsilon, \dots, t_N^\varepsilon\} \in \Sigma$ とおく.

- このとき $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると $F(t_i^\varepsilon) \rightarrow F(t_i - 0)$ より, ε を十分小さくとると

$$L < \sum_{i=1}^n F(t_i^\varepsilon)(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon)$$

が成り立つ.

- 各 $i = 1, \dots, N$ に対して $F_n(t_i^\varepsilon) \rightarrow F(t_i^\varepsilon)$ ($n \rightarrow \infty$) より

$$\sum_{i=1}^n F_n(t_i^\varepsilon)(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon) \rightarrow \sum_{i=1}^n F(t_i^\varepsilon)(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon) \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. したがって, ある $n_L \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_L$ ならば

$$L < \sum_{i=1}^n F_n(t_i^\varepsilon)(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^n F_n(t_i^\varepsilon - 0)(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon) \leq \int_0^\infty F_n(t) dt$$

である. ここで F_n が非増加であることから $F_n(t_i^\varepsilon) \leq F_n(t_i^\varepsilon - 0)$ であることを用いた. 以上より

$$L < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_n(t) dt$$

が成り立つ. L は $L < \int_0^\infty F(t) dt$ なる任意の数なので $L \uparrow \int_0^\infty F(t) dt$ として

$$\int_0^\infty F(t) dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_n(t) dt$$

となり結論を得る. $\square$

問 4.2 $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ が単調非増加関数とすると、任意の $a > 0$ に対して

$$\int_0^\infty F(t)dt \geq aF(a)$$

が成り立つことを証明せよ (Hint: $\sigma = \{0, a\} \in \Sigma$ を考えよ).

- 次の小節で一般の非負値可測関数の積分をその分布関数の Archimedes 積分で定義する。しかし、単関数の場合にはすでに与えられている定義と一致することを確かめる必要がある。そのため、まず次のことを確かめよう。

命題 4.5

$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = \infty$, $\infty \geq c_1 > c_2 > \cdots > c_n \geq 0$ なる数を用いて F が

$$F|_{(a_{i-1}, a_i)} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすとする。このとき

$$\int_0^\infty F(t)dt = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1})$$

である。

証明

- $c_n = 0$ の場合を示す。 $\sigma \in \Sigma$ を任意にとり $\sigma' = \sigma \cup \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ とおく。 $\sigma' = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < \infty$ と表す。
- 各 $i = 1, \dots, n-1$ に対して $a_i = t_{k_i}$ となる $k_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ が成り立つ。さらに $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{n-1} \leq m$ が成り立つ。 $k_{i-1} < j \leq k_i$ に対して $F(t_j - 0) = c_i$ である。
- したがって

$$\begin{aligned} I_F(\sigma') &= \sum_{j=1}^m F(t_j - 0)(t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} F(t_j - 0)(t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1}) \end{aligned}$$

- 上の $I_F(\sigma')$ は σ に依存しなく問4.1(2) より $I_F(\sigma') \geq I_F(\sigma)$ であるから

$$I(\sigma) \leq \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1}) \leq \int_0^\infty F(t)dt$$

したがって結論を得る.

- $c_n > 0$ のときは $k > a_{n-1}$ なる任意の k をとると問4.2 より

$$\int_0^\infty F(t)dt \geq kF(k) = kc_n$$

であるから $\int_0^\infty F(t)dt = \infty$ となる. さらに $c_n(a_n - a_{n-1}) = \infty$ であるから同じく結論を得る. $\square$

- f が単関数で (4.1) のときは M_f は (4.2) であるから

$$\int_0^\infty M_f(t)dt = \sum_{i=1}^n M_f(a_{i-1})(a_i - a_{i-1}) = \int_X f d\mu$$

を得る.

4.4 非負値可測関数の積分

定義

- $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とし, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする. このとき

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) := \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) dt$$

と定義し, f の X 上の測度 μ に関する積分という.

- $\int_X f d\mu < \infty$ であるとき f は可積分であるという.

命題 4.6(Markov の不等式)

$f: X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする. このとき任意の $a > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu$$

証明 f の分布関数を M_f とすると, 問4.2 より任意の $a > 0$ に対し

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty M_f(t)dt \geq aM_f(a) = a\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\})$$

を得る. $\square$

命題 4.7

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする.

(1) f が可積分ならば $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$ が成り立つ.

(2) $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e. } x \in X$

証明

(1) f が可積分であるから Markov の不等式より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}) = 0$$

である. $E_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ とおくと $\{E_n\}$ は単調減少列で, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $\mu(E_{n_0}) < \infty$ である. さらに

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$$

である. したがって命題 1.5 より

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$$

(2) $(\Leftarrow)$ $f = 0 \text{ a.e.}$ のとき, 任意の $t > 0$ に対し $\mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) = 0$ である. したがって問 4.1(3) より $\int_X f d\mu = 0$ である.

$(\Rightarrow)$ Markov の不等式により, 任意の $a > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > a\}) = 0$$

である. $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n = \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ とおくと $\{F_n\}$ は単調増加列で $\mu(F_n) = 0$ である.

$$\{x \in X \mid f(x) = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

である. したがって命題 1.4 より

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = 0$$

である. $\square$

定理 4.8(Beppo-Levi の定理, 単調収束定理)

$f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数列で $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ が全ての $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ に対して成り立つとする. このとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

注 f も $\mathcal{E}$ -可測関数である.

証明 $\{f_n\}$ の仮定から, 任意の $t > 0$ に対して

$$\{x \in X \mid f_n(x) > t\}$$

は n に関する単調増加列で

$$\{x \in X \mid f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) > t\}$$

を得る.

命題 1.4 より

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid f_n(x) > t\})$$

つまり f の分布関数 M_f と f_n の分布関数 M_{f_n} に対し, $\{M_{f_n}\}$ は単調増加列で $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{f_n}(t) = M_f(t)$ を得る.

以上より命題 4.4 から

$$\int_X f d\mu = \int_0^{\infty} M_f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} M_{f_n}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

を得る. $\square$

問 4.3 $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) を $\mathcal{E}$ -可測関数とするとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu$$

を証明せよ.

- 単調収束定理と定理 3.9 を用いると次のことが得られる.

命題 4.9

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とすると, $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x \in X$) なる単関数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在して

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ($x \in X$)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \int_X f d\mu$

が成り立つ.

命題 4.10

$f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする.

(1) $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ に対して

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

が成り立つ.

(2) $f(x) \leq g(x)$ ($x \in X$) ならば $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ が成り立つ.

証明

(1) 命題 4.9 より $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, $0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x \in X$) なる単関数の列があつて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = g(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu &= \int_X f d\mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n d\mu = \int_X g d\mu \end{aligned}$$

が成り立つ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x) + \psi_n(x)) = f(x) + g(x)$ と命題 4.1 より

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \alpha \int_X \varphi_n d\mu + \beta \int_X \psi_n d\mu \right\} \\ &= \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu \end{aligned}$$

を得る.

(2) $f(x) \leq g(x)$ ($x \in X$) より任意の $t > 0$ に対して $\{x \in X \mid f(x) > t\} \subset \{x \in X \mid g(x) > t\}$ を得る. これより f, g の分布関数 M_f, M_g に対して $M_f(t) \leq M_g(t)$ が成り立つことから結論を得る. $\square$

問 4.4 $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする。次を示せ。

(1) $f(x) \leq g(x)$ (a.e. $x \in X$) $\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ が成り立つ。

(2) $f(x) = g(x)$ (a.e. $x \in X$) $\Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ が成り立つ。

(Hint(1): a.e. でなく $x \in X$ のときは明らか。 $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ が存在して $f(x) \leq g(x)$ ($x \in X \setminus N$) が成り立つとする。 $f(x) = f(x)\chi_{X \setminus N}(x) + f(x)\chi_N(x)$, $g(x) = g(x)\chi_{X \setminus N}(x) + g(x)\chi_N(x)$ とすると $f(x)\chi_{X \setminus N}(x) \leq g(x)\chi_{X \setminus N}(x)$ ($x \in X$) で $f(x)\chi_N(x) = 0$ (a.e. $x \in X$), $g(x)\chi_N(x) = 0$ (a.e. $x \in X$) で

$$\int_X f d\mu = \int_X f \chi_{X \setminus N} d\mu + \int_X f \chi_N d\mu = \int_X f \chi_{X \setminus N} d\mu$$

である)

4.5 一般の可測関数の積分

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする。このとき

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおくと $f^+, f^- : X \rightarrow [0, \infty]$ はそれぞれ $\mathcal{E}$ -可測関数で

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

が成り立つ。

定義

$f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする。 f^+, f^- の少なくとも1つが可積分であるとき、 f は**積分確定**であるといい

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

と定める。さらに、 f^+, f^- が共に可積分であるとき f は**可積分**であるという。

注 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が可積分 $\Leftrightarrow |f| : X \rightarrow [0, \infty]$ が可積分

命題 4.11

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数で積分確定であるとする。このとき

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}
\left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\
&\leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu \quad \square
\end{aligned}$$

命題 4.12

$f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数で可積分関数とする.

(1) f, g が有限値で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha f + \beta g$ も可積分で

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

が成り立つ.

(2) $f(x) \leq g(x)$ ($x \in X$) ならば $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ が成り立つ.

証明 仮定から

$$0 \leq \int_X f^+ d\mu, \int_X g^+ d\mu < \infty$$

であることに注意する.

(1) $\alpha > 0, \beta < 0$ の場合だけ示す. $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ とおくと

$$\begin{aligned}
\alpha f(x) + \beta g(x) &= \alpha(f^+(x) - f^-(x)) + \beta(g^+(x) - g^-(x)) \\
&= (\alpha f^+(x) - \beta g^-(x)) - (\alpha f^-(x) - \beta g^+(x))
\end{aligned}$$

である. ここで $\alpha f^+(x) - \beta g^-(x) \geq 0$, $\alpha f^-(x) - \beta g^+(x) \geq 0$ である. 一方

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)^+(x) - (\alpha f + \beta g)^-(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}
(\alpha f^+(x) - \beta g^-(x)) - (\alpha f^-(x) - \beta g^+(x)) &= (\alpha f + \beta g)^+(x) - (\alpha f + \beta g)^-(x) \\
(\alpha f^+(x) - \beta g^-(x)) + (\alpha f + \beta g)^-(x) &= (\alpha f + \beta g)^+(x) + (\alpha f^-(x) - \beta g^+(x))
\end{aligned}$$

よって命題 4.10 より

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_X f^+ d\mu + (-\beta) \int_X g^- d\mu + \int_X (\alpha f + \beta g)^- d\mu \\
&= \int_X (\alpha f + \beta g)^+ d\mu + \alpha \int_X f^- d\mu + (-\beta) \int_X g^+ d\mu
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} & \int_X (\alpha f + \beta g)^+ d\mu - \int_X (\alpha f + \beta g)^- d\mu \\ &= \alpha \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) - \beta \left(\int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \right) \end{aligned}$$

を得る.

- (2) $f(x) \leq g(x)$ ($x \in X$) のとき $f^+(x) \leq g^+(x)$, $f^-(x) \geq g^-(x)$ ($x \in X$) が成り立つ.
よって問 4.4 より

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X g d\mu$$

を得る. $\square$

定義

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数で可積分であるとする. $A \in \mathcal{E}$ に対して

$$\int_A f d\mu := \int_X f \chi_A d\mu$$

と定める.

- $A \in \mathcal{E}$ に対して $\chi_A(x) + \chi_{A^c}(x) = 1$ であるから f が有限値で可積分ならば $\chi_A f$, $\chi_{A^c} f$ もそうであるので命題 4.12(1) より

$$\int_A f d\mu = \int_{A^c} f d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

命題 4.13

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数で可積分であるとする.

- (1) $|f(x)| < \infty$ a.e. $x \in X$ である.

(2) $f(x) = 0$ a.e. $x \in X \Rightarrow \int_X f d\mu = 0$

(3) $E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$

(4) 任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して $\int_A f d\mu = 0$ が成り立つならば $f = 0$ a.e. $x \in X$

問 4.5 上の命題を証明せよ. (Hint:(4) まず $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ を考えよ.)

問 4.6 $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が積分確定で $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in X$ であるとする. $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ が成り立つことを証明せよ. (Hint: f^+, f^-, g^+, g^- に問 4.4 を用いよ).

- $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が単に可積分であるとき $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$ のとき $f(x)+g(x)$ は定義されない. これを解消する方法を述べる.
- f が a.e. $x \in X$ でのみ定義される, 正確には $X \setminus N$ ($N \in \mathcal{E}, \mu(N) = 0$) で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数であるとき

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

とする. $\tilde{f}$ が可積分であるとき f が可積分であるといい

$$\int_X f d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu$$

と定める. f が X 全体で定義される可積分関数であるとき

$$N = \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$$

とおき, 上のように $\tilde{f}$ を定めれば問 4.6 より

$$\int_X f d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu$$

である.

- f, g が可積分であるとき上のように定めた $\tilde{f}, \tilde{g}$ は全ての点で有限な値をもつ可積分関数であるので $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$ は全ての点で定義され, 命題 4.12(1) と問 4.6 より

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \int_X (\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}) d\mu = \alpha \int_X \tilde{f} d\mu + \beta \int_X \tilde{g} d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

を得る.

4.6 積分の絶対連続性

定理 4.14

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を可積分関数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$E \in \mathcal{E}, \mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明

- $f(x) \geq 0$ ($x \in X$) として一般性を失わない.
- $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq n) \\ n & (f(x) > n) \end{cases}$ とおくと $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ が全ての $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ に対して成り立つ. さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つ.
- 単調収束定理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると, ある番号 $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq \int_X (f - f_n) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ.

- $\delta = \varepsilon/2n_\varepsilon$ とおけば $\mu(E) < \delta$ ならば

$$\int_E f d\mu \leq \int_E f_{n_\varepsilon} d\mu + \int_X (f - f_{n_\varepsilon}) d\mu < \varepsilon$$

が成り立つ. $\square$

問 4.6 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が可積分であるとする. このとき $E_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu = 0$$

が成り立つことを証明せよ.