

3 可測関数

3.1 可測関数の定義と性質

- 本節では Lebesgue 積分の対象となる可測関数の定義と性質について述べる.

定義

$(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ をそれぞれ可測空間とする. $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{E}$ -可測あるいは単に可測であるとは, 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことである.

命題 3.1

$(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ をそれぞれ可測空間, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ は $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}$ を満たすとする. $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{E}$ -可測であるための必要十分条件は任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことである.

証明

- f が $\mathcal{E}$ -可測であるならば任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つことは明らか.
- 逆に任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つとする. このとき

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

とおくと $\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ である. さらに $\mathcal{G}$ は σ -加法族であることが示される. したがって $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}$ より $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ である. $\square$

問 3.1 上の $\mathcal{G}$ は σ -加法族であることを示せ.

- X, Y を距離空間とし, 2つの可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$, $(Y, \mathcal{B}(Y))$ を考える. X, Y の開集合全体をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ とすると $\sigma[\mathcal{O}_Y] = \mathcal{B}(Y)$ である. $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であることの必要十分条件は, 任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ であることから次のことが示される.

命題 3.2

X, Y を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき f は $\mathcal{B}(X)$ -可測である.

- $Y = \mathbb{R}$ とする. $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$, $[a, b) = [a, \infty) \cap [b, \infty)^c$ であることに注意すると $\mathcal{A} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ とすると $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{B}[\mathbb{R}]$ であることがわかる. したがって命題 3.1 より次のことがわかる.

命題 3.4

$(X, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ をそれぞれ可測空間とし $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{E}$ -可測であるための必要十分条件は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathcal{E}$$

が成り立つことである.

問 3.2 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{E}$ -可測ならば任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathcal{E}$ を証明せよ.

命題 3.5

$(X, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ をそれぞれ可測空間とし $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ が共に $\mathcal{E}$ -可測であるならば

- (1) $c \in \mathbb{R}$ に対して $(f+c)(x) := f(x)+c$ で定義される関数 $f+c$ も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (2) $c \in \mathbb{R}$ に対して $(cf)(x) := cf(x)$ で定義される関数 cf も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (3) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \in \mathcal{E}$ である.
- (4) $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ で定義される関数 $f+g$ も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (5) $f^2(x) := f(x)^2$ で定義される関数 f^2 も $\mathcal{E}$ -可測である.
- (6) $(fg)(x) := f(x)g(x)$ で定義される関数 fg も $\mathcal{E}$ -可測である.

証明 命題 3.4 を用いる

- (1) $a \in \mathbb{R}$ を任意にとると $\{x \in X \mid f(x) + c > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a - c\} \in \mathcal{E}$ である.
- (2) $c = 0$ ならば cf は連続関数であるので明らか. $c > 0$ とする. $a \in \mathbb{R}$ をとると $\{x \in X \mid (cf)(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > a/c\} \in \mathcal{E}$ である. $c < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid (cf)(x) > a\} &= \{x \in X \mid f(x) < a/c\} \\ &= f^{-1}((-\infty, a/c)) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, (a/c) - (1/n))\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, (a/c) - (1/n))) \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

- (3) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ ある有理数 r があつて $f(x) > r$ かつ $r > g(x)$ であるから

$$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X \mid f(x) > r\} \cap \{x \in X \mid g(x) < r\}) \in \mathcal{E}$$

である. ここで $\mathbb{Q}$ は可算集合であることを用いた.

- (4) 任意に $a \in \mathbb{R}$ をとると, (1), (2), (3) より $\{x \in X \mid f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X \mid f(x) > -g(x) + a\} \in \mathcal{E}$ である.
- (5) 任意に $a \in \mathbb{R}$ をとると, $a < 0$ のときは $\{x \in X \mid f(x)^2 > a\} = X \in \mathcal{E}$ である.
 $a \geq 0$ のときは

$$\{x \in X \mid f(x)^2 > a\} = \{x \in X \mid f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X \mid f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{E}$$

である.

- (6) fg は

$$(fg)(x) = \frac{1}{4}\{(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\}$$

と表されるので (1), (2), (3), (4), (5) より fg は $\mathcal{E}$ -可測である. $\square$

- Lebesgue 積分では $+\infty$ や $-\infty$ をとる関数も考えると都合がいい. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を拡張された実数の集合とする.

定義

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{E}$ -可測であるとは, 次の (i), (ii) が成り立つことである:

- (i) $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}$
- (ii) 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ が成り立つ.

- 以後, 誤解のないとき $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ などをも $\{f > a\}$ などと略記する.

命題 3.6

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{E}$ -可測であることと, 次の (i)–(iv) が成り立つことは同値である:

- (i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f \leq a\} \in \mathcal{E}$
- (ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f < a\} \in \mathcal{E}$
- (iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f \geq a\} \in \mathcal{E}$
- (iv) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\{f > a\} \in \mathcal{E}$

証明 可測 $\Rightarrow$ (i)

- $\{f \leq a\} = \{-\infty < f \leq a\} \cup \{f = -\infty\}$ であり, $(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるから $\{-\infty < f \leq a\} \in \mathcal{E}$ である. また, 仮定から $\{f = -\infty\} \in \mathcal{E}$ より $\{f \leq a\} \in \mathcal{E}$ である.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- $\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \leq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{E}$ より ok

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

- $\{f \geq a\} = \{f < a\}^c \in \mathcal{E}$ より ok

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

- $\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \geq a + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{E}$ より ok

(iv) $\Rightarrow$ 可測

- $\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \mathcal{E}$ である.
- $\{f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \leq -n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > -n\}^c \in \mathcal{E}$ である.
- 以上より, $f^{-1}((a, \infty)) = \{a < f < \infty\} = \{f > a\} \setminus \{f = \infty\} \in \mathcal{E}$ である.
- これより

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

は $\mathcal{A} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ を含む σ -加法族であるので $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. したがって f は可測である.

□

命題 3.7

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測であるとする. このとき

$$\begin{aligned} (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &= \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &= \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k(x), \\ (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x) \end{aligned}$$

で定義される

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

も $\mathcal{E}$ -可測である. 特に各 $x \in X$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在すれば $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ で定義される $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ も $\mathcal{E}$ -可測である.

証明

- $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \leq a \Leftrightarrow f_n(x) \leq a \ (n = 1, 2, \dots)$ より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{E}$$

である. よって命題 3.7 の (i) より $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ は $\mathcal{E}$ -可測である.

- $(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \geq a \Leftrightarrow f_n(x) \geq a \ (n = 1, 2, \dots)$ より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{E}$$

である. よって命題 3.7 の (iii) より $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ は $\mathcal{E}$ -可測である.

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ については $\sup$ に関する結果と $\inf$ に関する結果を用いればよい. $\square$

問 3.3 $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測とするとき $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{E}$ であることを示せ.

- 以上のことと, から次のことがすぐわかる.

系 3.8

$(X, \mathcal{E})$ を可測空間とする. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{E}$ -可測であるとする. このとき

$$\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ が存在} \} \in \mathcal{E}$$

が成り立つ.

3.2 単関数

- 以後, 関数の定義域として可測空間 $(X, \mathcal{E})$ を固定する.

定義

$\mathcal{E}$ -可測関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はその値域が有限集合であるとき, **($\mathcal{E}$ -) 可測単関数**あるいは単に**単関数**であるという. X 上の可測単関数全体を $\mathcal{S}(X)$ で表す.

注意

- f が単関数であるとき, $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ と共通部分のない $\mathcal{E}$ -可測集合 $A_1, \dots, A_n$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

が成り立つ. ここで $\{a_1, \dots, a_n\}, \{A_1, \dots, A_n\}$ の選び方は一意的ではない.

- f, g が共に $\mathcal{E}$ -可測であるとき

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}(x)$$

と表されるとき $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j), B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$ であるから

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \chi_{A_i \cap B_j}(x), \quad g(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i \chi_{A_i \cap B_j}(x),$$

と表される. したがって f と g に現れる可測集合は同じものにとれる.

定理 3.9

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $f(x) \geq 0$ ($x \in X$) を満たす $\mathcal{E}$ -可測関数とする. このとき $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x)$ ($x \in X$) を満たす $\mathcal{E}$ -可測単関数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ($x \in X$) が成り立つ.

証明

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E_i^{(n)} = \left\{ x \in X \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n2^n),$$

$$F^{(n)} = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$$

とすると $f(x) \geq 0$ であることから $X = F^{(n)} \cup \bigcup_{i=1}^{n2^n} E_i^{(n)}$ と互いに交わらない和集合として表される.

- f は $\mathcal{E}$ -可測であるから $E_i^{(n)} \in \mathcal{F}$, $F^{(n)} \in \mathcal{E}$ が成り立つ.
- $\varphi_n(x)$ を次のように定義する:

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_i^{(n)}}(x) + n \chi_{F^{(n)}}(x)$$

この φ_n は明らかに X 上の単関数である. これが定理の条件を満たすことを示そう.

$\varphi_n(x) \leq f(x)$ であること

- $x \in X$ とする. $x \in E_i^{(n)}$ であるとき $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x)$ である. また $x \in F^{(n)}$ のとき $\varphi_n(x) = n \leq f(x)$ である.

$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ であること:

- $x \in X$ とする. $x \in E_i^{(n)}$ ならば

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) = \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}} \right)$$

であるから $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$ であるが, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2(i-1)}{2^{n+1}}$ または $\frac{2i-1}{2^{n+1}}$ であるので $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である. 次に $x \in F^{(n)}$ とする. このとき $\varphi_n(x) = n$ である. もし $x \in F^{(n+1)}$ ならば明らかに $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である.

- $x \notin F^{(n+1)}$ のときは $f(x) \geq n$ であるから $x \in \bigcup_{i=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_i^{(n+1)}$ であるので $\varphi_{n+1}(x) \geq n = \varphi_n(x)$ である.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ であること:

- まず $f(x) < \infty$ とする. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $f(x) < n$ ($n \geq n_0$) が成り立つ. 各 $n \geq n_0$ に対して $x \in E_{i_n}^{(n)}$ となる $i_n \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$ がただ1つ定まる. このとき $\frac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_n}{2^n}$ であり $\varphi_n(x) = \frac{i_n - 1}{2^n}$ であるから

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ. したがって $f(x) < \infty$ なる $x \in X$ に対しては $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ が成り立つ.

- 次に $f(x) = \infty$ とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) > n$ であるので $x \in F^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) である. このような x に対して $\varphi_n(x) = n$ であるから $f(x) \geq \varphi_n(x) = n$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ である. 以上で定理が示された. $\square$

定義

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間, $P(x)$ を X の点 x に関する命題とする. ある $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ があって命題 $P(x)$ が $x \in X \setminus N$ に対して成り立つとき, 命題 $P(x)$ は**ほとんどすべての x に対して成り立つ**あるいは**ほとんど至るところ成り立つ**といい, $P(x)$ a.e., $P(x)$ a.e. $x \in X$ などと表す.

例

- (1) $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とする. $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ が存在して

$$f(x) = g(x) \quad x \in X \setminus N$$

が成り立つとき,

$$f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と表す.

- (2) $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $n = 1, 2, \dots$ を $\mathcal{E}$ -可測関数とし, ある関数 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{E}$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in X \setminus N$$

が成り立つとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と表す. このとき必ずしも f は $\mathcal{E}$ -可測とは限らないことに注意する.

問 3.4 2つの $\mathcal{E}$ -可測関数 f, g に対して

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と定義するとき, $\sim$ は X 上 $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる $\mathcal{E}$ -可測関数全体における同値関係となることを示せ.