2　外測度とLebesgue測度

2.1　外測度

定義

X を空でない部分集合とし，$\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ が次を満たすとき，μ^* を X 上の**外測度**という.

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(2) $A \subset B$ ならば $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$

(3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

問 2.1 X を空でない集合とする.

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

は外測度であることを示せ.

命題 2.1

X を空でない集合とし，$\mathcal{A}$ を有限加法族，μ を $\mathcal{A}$ 上の完全加法的集合関数とする. このとき

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\quad E_n \in \mathcal{A}\right\}$$

とおくと，μ^* は外測度である.

証明

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ は明らかである.

(2) $A \subset B$ とする. $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ が $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ならば $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ であるので

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

である. $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ なる $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ について下限をとれば $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ を得る.

(3) $\{A_n\} \subset 2^X$ とする．$\mu^*(A_n) = \infty$ となる n があれば明らかであるので $\mu^*(A_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．各 n に対して $E_k^{(n)} \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ があって

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} \quad \text{かつ} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_n^{(k)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

が成り立つ．$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$ （可算個の和集合でおおわれている!）であるから μ^* の定義より

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_n^{(k)}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ 任意より

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

を得る．□

2.2 Carathéodory 可測性

定義

X を空でない集合とし，μ^* を X 上で外測度とする．$A \subset X$ が

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X)$$

が成り立つとき，**Carathéodory 可測**，**$\boldsymbol{\mu^*}$ -可測**，あるいは単に**可測**という．

注 $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ であるので外測度の性質により

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

は自動的に成り立つ．よって $A \subset X$ が可測 $\Leftrightarrow$

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X)$$

である．

- $\mathcal{M}$ を次で定義しよう：

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{A \subset X \ : \ \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ \ ({}^\forall E \subset X)\} \\ &= \{A \subset X \ : \ A \text{ は可測 }\}\end{aligned}$$

とおく．

定理 2.2

上で定義した $\mathcal{M}$ は σ-加法族である．

証明 $\mathcal{M}$ が有限加法族の条件 (1), (2), (3) および問 1.4 の条件を満たせばよい．

有限加法族の条件 (1)

$A = X$ とすると $A^c = \emptyset$ より任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$$

したがって $X \in \mathcal{M}$ である．

有限加法族の条件 (2)

$(A^c)^c = A$ より明らかである．

有限加法族の条件 (3)

- $A, B \in \mathcal{M}$ とする．(2) より $A \cap B \in \mathcal{M}$ を示せばよい．なぜなら，$A^c, B^c \in \mathcal{M}$ より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{M}$ であり，再び (2) から $A \cup B \in \mathcal{M}$ となるからである．

- $A \cap B \in \mathcal{M}$ を示そう．任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \tag{2.1}$$
$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \tag{2.2}$$

が成り立つ．ここで (2.2) で E を $E \cap A$ に置き換えると

$$\mu^*(E \cap A) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)$$

よって (2.1) より

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c)\end{aligned}$$

である．

- ここで集合に関する等式

$$(A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup A^c = (A^c \cap B^c) \cup A^c$$

より

$$E \cap (A \cap B)^c = (E \cap (A \cap B^c)) \cup (E \cap A^c)$$

である．よって外測度の性質 (2) より

$$\mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$$

したがって

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$$

が成り立つ．よって $A \cap B \in \mathcal{M}$ が成り立つ．

問 1.4 の性質

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ とする．このとき $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ を示す．

- 任意の $E \subset X$ に対して $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ を示す．ここで

$$E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

より外測度の性質から $\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$ が成り立つ．したがって

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^{\forall}E \subset X) \tag{2.3}$$

を示せばよい．

- $S_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ とすると $S_k \subset A$ より $S_k^c \supset A^c$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．したがって

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap S_k^c) \quad k = 1, 2, \cdots \tag{2.4}$$

が成り立つ．

- 次のことを示せば十分である：任意の $E \subset X$, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_k^c) \tag*{$(*)_k$}$$

実際，これが示されれば，(2.4) より，任意の $E \subset X$, $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c)$$

であるので $k \to \infty$ とすれば (2.3) を得る．

- $(*)_k$ を帰納法で示す．$k = 1$ のとき $S_1 = A_1$ より $S_1^c = A_1^c$ であり $A_1 \in \mathcal{M}$ であるから A_1 の可測性の定義式から成り立つ．

- k のとき，任意の $E \subset X$ に対して $(*)_k$ が成り立つとする．任意の $E \subset X$ に対して $(*)_k$ の式で E を $E \cap S_k$ と置き換えれば

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap S_k) &\geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap S_k \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_k \cap S_k^c) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

である．

- $(*)_{k+1}$ を示そう．$A_{k+1} \in \mathcal{M}$ より

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c)$$

つぎに $S_k \in \mathcal{M}$ より

$$\mu^*(E \cap A_{k+1}^c) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A^{k+1} \cap S_k^c)$$

である．よって

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \tag{2.6}$$

を得る．

- つぎに A_{k+1} は $A_1, \cdots, A_k$ と交わらないので，$A_{k+1} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right)^c = S_k^c$ である

ので $S_k \subset A_{k+1}^c$ であり，$S_{k+1}^c = \bigcap_{n=1}^{k} A_n^c \cap A_{k+1}^c$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \\
&= \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap S_k) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \quad (\because \quad (2.5)) \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c)
\end{aligned}
$$

(2.6) より

$$
\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k+1} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c)
$$

となり $k+1$ のときも $(*)_{k+1}$ が成り立つ．□

定理 2.3

$A \in \mathcal{M}$ に対し $\mu(A) = \mu^*(A)$ と定義すると μ は $\mathcal{M}$ 上の測度である．

証明

- $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ である．
- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{M}$ は $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq h)$ とし，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．定理 3.1 で示した式

$$
\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X)
$$

を用いる．$E = A$ とすると

$$
\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)
$$

一方，外測度の性質から $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ が成り立つ．□

命題 2.4

X を空でない集合，μ^* を X 上の外測度とすると，定理 2.2 および定理 2.3 で定まる σ-加法族 $\mathcal{M}$, 測度 μ に対して $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備な測度空間である．

証明

- $N \in \mathcal{M}$ とし，$M \subset N$ とする．$M \in \mathcal{M}$ を示す．任意の $E \subset X$ に対して $E \cap M \subset E \cap N$ より $\mu^*(E \cap M) \leq \mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) = \mu(N) = 0$ である．

- 外測度の単調性により $\mu^*(E \cap M^c) \leq \mu^*(E)$ であるので

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap M^c) = \mu^*(E \cap M) + \mu^*(E \cap M^c)$$

  を得る．よって $M \in \mathcal{M}$ である．当然 $\mu(M) = 0$ である．□

2.3 Hopf の拡張定理

定理 2.4

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族，μ_0 を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的な集合関数とする．このとき μ_0 が $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張されるための必要十分条件は μ_0 が $\mathcal{A}$ 上で完全加法的であることである．さらに X が σ-有限であるならば拡張は一意である．

証明 **Step 1：外測度の構成**

- μ_0 が $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張されるならば μ_0 は $\mathcal{A}$ で完全加法的でなければならないのは明らか.

- μ_0 が $\mathcal{A}$ で完全加法的であるとする．命題 2.1 のように

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathcal{A}\right\}$$

  とおくと μ^* は外測度となる．この外測度により定義される可測集合全体を $\mathcal{M}$ とすると定理 2.2 より $\mathcal{M}$ は σ-加法族となり, $\mu(A) = \mu^*(A)$ $(A \in \mathcal{M})$ とおくと定理 2.3 より μ は $\mathcal{M}$ 上の測度となり，命題 2.4 より $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備測度空間となる.

Step 2：$\boldsymbol{\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}}$

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ を示す．$A \in \mathcal{M}$ とする．任意の $E \subset X$ に対して $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \mathcal{A})$ とすると

$$A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n) \quad A^c \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A^c \cap E_n)$$

  である.

- $A \cap E_n,\, A^c \cap E_n \in \mathcal{A}$ で $E_n = (A \cap E_n) \cup (A^c \cap E_n)$ であるから μ_0 の有限加法性と μ^* の定義により

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A^c \cap E_n) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)\end{aligned}$$

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \mathcal{A})$ なる $\{E_n\}$ に関する下限をとると

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

を得る．つまり $A \in \mathcal{M}$ である．以上より $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ を得る．$\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}$ を含む $\sigma-$加法族であるから $\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}$ となる．

Step 3：$\boldsymbol{\mu(A) = \mu_0(A) (A \in \mathcal{A})}$

- 次に $\mu_0(A) = \mu^*(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ を示す．μ^* の定義から $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ は明らかである．

- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ なる $E_n \in \mathcal{A}$ を任意にとる．$E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ としてよい．

- $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)$ で $A \cap E_n \in \mathcal{A}$ より μ_0 の完全加法性と μ^* の定義より

$$\mu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

が成り立つ． $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \mathcal{A})$ なる $\{E_n\}$ に関する下限をとると $\mu_0(A) \leq \mu^*(A)$ を得る．

- 以上で $A \in \mathcal{M}$ に対して $\mu(A) := \mu^*(A)$ とすれば μ_0 は $\sigma[\mathcal{A}]$ 上に拡張されたことになる．

Step 4：拡張の一意性λ は $\mu_0(A) = \lambda(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ を満たす $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度とする．

Step 4-1：$\boldsymbol{\lambda(A) \leq \mu(A)}$

- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \mathcal{A})$ とすると

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

であるから $\{E_n\}$ に関する下限をとれば $\lambda(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$ となる．

Step 4-2：$\mu(A) \le \lambda(A)$

- X は σ-有限であるから，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ($X_n \in \mathcal{A}$)，$\mu_0(X_n)(= \mu(X_n) = \lambda(X_n)) < \infty$ なる $\{X_n\}$ をとる．$\{X_n\}$ は単調増加としてよい．
- $A \in \sigma[\mathcal{A}]$ とすると $\lambda(B) \le \mu(B)$ $(B \in \sigma[\mathcal{A}])$ であるから
$$\begin{aligned}\mu(X_n \cap A) + \mu(X_n \cap A^c) = \mu(X_n) = \lambda(X_n) &= \lambda(X_n \cap A) + \lambda(X_n \cap A^c)\\ &\le \lambda(X_n \cap A) + \mu(X_n \cap A^c)\end{aligned}$$
である．
- $\mu(X_n \cap A)$, $\mu(X_n \cap A^c) < \infty$ であるから
$$\mu(X_n \cap A) \le \lambda(X_n \cap A)$$
を得る．$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n \cap A)$ で $\{X_n \cap A\}$ は単調増加であるから上の式で $n \to \infty$ とすれば
$$\mu(A) \le \lambda(A)$$
を得る．

よって拡張は一意である．

2.4 Lebesgue 測度の構成

- Lebesgue 測度を構成する．
- $\mathbb{R}$ の区間塊全体 $\mathcal{I}$ は有限加法族であった．$\mathcal{A}$ 上で完全加法的な集合関数 m を定義しよう．
- まず，半開区間 $[a, b)$ に対して $m([a, b)) = b - a$ と定義する．簡単な計算から
  - $[c, d) \subset [a, b) \Rightarrow m([c, d)) \le m([a, b))$
  - $[a, b) \subset \bigcup_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$ ならば $(b - a) \le \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$

  を得る．

命題 2.5

$I_k = [a_k, b_k)$ を $\mathbb{R}$ の共通部分のない半開区間の列とし，$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ は再び半開区間であるとする． このとき

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

が成り立つ.

証明

- $[a_0, b_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ とおく．任意の n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq b_0 - a_0 = m([a_0, b_0))$$

  であるので $n \to \infty$ とすれば $\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \leq m([a_0, b_0))$

- 逆の不等式を示す．まず $-\infty < a_0 < b_0 < \infty$ の場合を示す．このとき $I_k \subset [a_0, b_0)$ より $-\infty < a_k \leq b_k < \infty$ であることに注意． $0 < \varepsilon < b_0 - a_0$ となる $\varepsilon > 0$ をとれば

$$[a_0, b_0 - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k - \varepsilon 2^{-k}, b_k)$$

  を得る.

- $[a_0, b_0 - \varepsilon]$ はコンパクト集合なので，ある k_0 があって

$$[a_0, b_0 - \varepsilon) \subset [a_0, b_0 - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{k_0}(a_k - \varepsilon 2^{-k}, b_k)$$

  が成り立つ.

- これより

$$m([a_0, b_0)) - \varepsilon = (b_0 - \varepsilon) - a_0 \leq \sum_{k=1}^{k_0}(b_k - a_k + \varepsilon 2^{-k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon$$

  $\varepsilon > 0$ は任意なので $m([a_0, b_0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ を得る.

- $a_0 = -\infty$ あるいは $b_0 = \infty$ の場合を示す．$a_0 = -\infty$. $b_0 = \infty$ のときは α_0, β_0 を $\alpha_0 < \beta_0$ なる実数とすると

$$[\alpha_0, \beta_0) = [a_0, b_0) \cap [\alpha_0, \beta_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)$$

であり，$I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)$ は半開区間であるから前の議論より

$$\beta_0 - \alpha_0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap [\alpha_0, \beta_0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

である．$\beta_0 \to \infty$, $\alpha_0 \to -\infty$ とすればよい．□

- 以上の準備のもとに区間塊 $I \in \mathcal{I}$ に対して $m(I)$ を定義しよう．共通部分のない半開区間の和として $I = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$ と表される．このとき

$$m(I) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

で定義する．

- この定義が区間塊の表し方に依らないことを示そう．このとき $I = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^{l} [c_j, d_j)$ とする．

$$I = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \cap [c_j, d_j)$$

となる．$[a_k, b_k) \cap [c_j, d_j)$ も半開区間であり $I_{k,j}$ とすると $[a_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^{l} I_{k,j}$ である．命題 2.5 より $m([a_k, b_k)) = \sum_{j=1}^{m} (I_{k,j})$ である．同様に $[c_j, d_j) = \bigcup_{k=1}^{n} I_{k,j}$ であり $m([c_j, d_j)) = \sum_{k=1}^{n} m(I_{k,j})$ である．したがって

$$\sum_{k=1}^{n} m([a_k, b_k)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} m(I_{k,j}) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{n} m(I_{k,j}) = \sum_{j=1}^{l} m([c_j, d_j))$$

を得る．

命題 2.6

m は区間塊のなす有限加法族 $\mathcal{I}$ 上で完全加法的である．

証明

- $A_n \in \mathcal{I}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ とし，$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$ とすると $A = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ なる共通部分のない半開区間 I_i $(i = 1, \cdots, k)$ と表される．m の定義より

$$m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(I_k),$$

- $A_n \in \mathcal{I}$ より，各 n に対して $A_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} I_j^{(n)}$ なる共通部分のない半開区間 $I_j^{(n)}$ $(j = 1, \cdots, k_n)$ が存在する．

- $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} I_j^{(n)}$ であり $I_i = A \cap I_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} (I_j^{(n)} \cap I_i)$ である．また，$A_n \subset A$ より $A_n = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k_n} (I_j^{(n)} \cap I_i)$

- I_i は可算個の共通部分のない半開区間 $I_j^{(n)} \cap I_i$ の和集合で表されているので命題 2.5 より

$$m(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i)$$

  を得る．また m の定義より $m(A_n) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_n} (I_j^{(n)} \cap I_i)$ が成り立つ．

- 以上より

$$\begin{aligned} m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(I_i) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_n} m(I_j^{(n)} \cap I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \end{aligned}$$

  を得る．□

- $\mathbb{R}$ は明らかに σ-有限であるので，Hopf の拡張定理を用いると m は $\sigma[\mathcal{I}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ へ一意に拡張される．一般に m を用いて定義される外測度 m^* (**1 次元 Lebesgue 外測度**) による可測集合を **Lebesgue 可測集合**といい，その全体を $\mathcal{M}_1$ とすると $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_1$ であることが知られている．m は **1 次元 Lebesgue 測度**といわれる．

- 詳細は省くが N 次元 Lebesgue 測度も同様の手続きで定義される．$\mathbb{R}^N$ における半開区間

$$I = [a_1.b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$$

に対して

$$m_N(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N)$$

と定義する．次に A が $\mathbb{R}^N$ の区間塊全体 $\mathcal{I}_N$ の要素であるとき $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ と半開区間共通部分のない和集合で表されたとき

$$m_N(A) = \sum_{i=1}^{n} I(I_i)$$

と定義する．A が $\mathcal{I}_N$ 上で完全加法的であることを示せばよい．m_N を用いて定義される外測度 m_N^* (***N* 次元 Lebesgue 外測度**) に関して可測な集合を **Lebesgue 可測集合**という．その全体 $\mathcal{M}_N$ は $\mathcal{M}_N \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ であることが知られている．$\mathcal{M}_N$ 上で定義される m_N を ***N* 次元 Lebesgue 測度**という．

2.5 Lebesgue 測度の性質

定理 2.7(Lebesgue 測度の平行移動不変性)

$A \in \mathcal{M}_N$ とすると，任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$A + x =: \{y + x \mid y \in A\}$$

とすると $A + x \in \mathcal{M}_N$ であり $m_N(A + x) = m_N(A)$ である．

証明

- Lebesgue 外測度について $m_N^*(A + x) = m_N(A)$ $(E \subset \mathbb{R}^N)$ を示せばよい．

- Lebesgue 外測度 m_N^* の定義は

$$m_N^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n \in \mathcal{I}_N(n = 1, 2, \cdots)\right\}$$

である．

- $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n+x)$ であり，A_n+x も区間塊であり，$m_N(A_n+x) = m_N(A_n)$ である．

- よって

$$
\begin{aligned}
m_N^*(A+x) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n+x) \mid A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n + x, A_n \in \mathcal{I}_N(n=1,2,\cdots)\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{I}_N(n=1,2,\cdots)\right\} \\
&= m_N^*(A)
\end{aligned}
$$

  である．

- 次に可測性について示す．$A \in \mathcal{M}_N$ とする．任意に $E \subset \mathbb{R}^N$ に対して $E+(-x)$ を考えると

$$m_N^*(E+(-x)) = m_N^*((E+(-x)) \cap A) + m_N^*((E+(-x)) \cap A^c)$$

  である．x だけ平行移動させることにより

$$m_N^*(E) = m_N^*(E \cap (A+x)) + m(E \cap A^c)$$

  を得る．したがって $A+x \in \mathcal{M}_N$ であり $m_N(A+x) = m_N(A)$ が成り立つ．□

定理 2.8(Lebesgue 測度の正則性)

$A \in \mathcal{M}_N$ とすると

$$
\begin{aligned}
m_N(A) &= \inf\{m_N(O) \mid A \subset O \ O : \text{開集合}\} && (2.7)\\
&= \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \ K : \text{コンパクト集合}\} && (2.8)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

証明 (2.7) **の証明**

- $\mu(A) = \infty$ ならば明らかなので $\mu(A) < \infty$ とする．

- $A \subset O$ なる任意の開集合 O に対し，外測度の単調性から $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(O) = \mu(O)$ であるので

$$m_N(A) \leq \inf\{m_N(O) \mid A \subset O \ O : \text{開集合}\}$$

  を得る．

- 逆の不等式を示すために任意の $\varepsilon > 0$ をとると，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(A_n \in \mathcal{I}_N)$ があって

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) \leq m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- 各 A_n は有限個の半開区間 $I_1^{(n)}, \cdots I_{k_n}^{(n)}$ の和集合でかけるので，それぞれの半開区間を少し広げた開区間 $\widetilde{I_j^{(n)}}$ $(j = 1, \cdots, k_n)$ をとることにより

$$m_N\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} \widetilde{I_j^{(n)}}\right) \leq m_N(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

とすることができる．

- $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{k_n} \widetilde{I_j^{(n)}}$ は A を含む 1 つの開集合であり

$$\begin{aligned} m_N(O) = m_N^*(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_N\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} I_j^{(n)}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_N(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq m_N(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．したがって

$$\inf\{m_N(O) \mid A \subset O \ O : \text{開集合}\} \leq m_N(A)$$

である．

(2.8) **の証明**

- $K \subset A$ なる任意のコンパクト集合 K に対し，外測度の単調性から $\mu(K) = \mu^*(K) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$ であるので

$$\sup\{m_N(K) \mid K \subset A \ K : \text{コンパクト集合}\} \leq m_N(A)$$

を得る．

- 逆向きの不等式を示そう．$B_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \leq n\}$ とする．$B_n \cap A^c$ は Lebesgue 可測集合であるから

$$m_N(B_n \cap A^c) = \inf\{m_N(O) \mid B_n \cap A^c \subset O,\ O : \text{開集合}\}$$

である．

- $B_n \cap A^c$ を含む任意の開集合 O に対して $K = B_n \cap O^c$ とおくと K はコンパクトであり，$K \subset B_n \cap (B_n^c \cup A) = B_n \cap A$ である．よって

$$
\begin{aligned}
m_N(B_n) &= m_N(K) + m_N(B_n \cap K^c) = m_N(K) + m_N(O \cap B_n) \\
m_N(B_n) - m_N(K) &= m_N(O \cap B_n) \leq m_N(O)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
m_N(O) &\geq m_N(B_n) - m_N(K) \\
&\geq m_N(B_n) - \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \ K: \text{コンパクト集合}\}
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$
m_N(B_n \cap A^c) \geq m_N(B_n) - \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \cap B_n \ K: \text{コンパクト集合}\}
$$

を得る．

- よって

$$
\begin{aligned}
m_N(B_n \cap A) &= m_N(B_n) - m_N(B_n \cap A^c) \\
&\leq \sup\{m_N(K) \mid K \subset A \cap B_n,\ K: \text{コンパクト集合}\} \\
&\leq \sup\{m_N(K) \mid K \subset A, K: \text{コンパクト集合}\}
\end{aligned}
$$

となる．あとは $n \to \infty$ とすればよい．□