関数解析学特論I講義ノート（Lebesgue積分編）

松澤　寛

1 測度空間

1.1 可測空間

定義

X を空でない集合とし，$\mathcal{A} \subset 2^X$ が次の 3 条件を満たすとき，$\mathcal{A}$ を X の**有限加法族**あるいは **集合代数**という：

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

注 $\mathcal{A}$ が空でない集合 X の有限加法族とする．このとき (iii) を繰り返し用いることにより

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$$

が成り立つ．

問 1.1 $\mathcal{A}$ を空でない集合 X の有限加法族とする．次を示せ：

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

問 1.2 X を空でない集合とする．

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ は有限集合 または } A^c \text{ は有限集合}\}$$

は X の有限加法族であることを示せ．

定義

X を空でない集合とし，有限加法族 $\mathcal{E} \subset 2^X$ が

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

を満たすとき，$\mathcal{E}$ を X の ***σ*-加法族**であるという．このとき，X と $\mathcal{E}$ の組 $(X, \mathcal{E})$ は**可測空間**であるという．

例 1.1 X を空でない集合とするとき 2^X, $\{X, \emptyset\}$ は X の σ-加法族である．

$\boxed{\textbf{問 1.3}}$ X を非可算集合とする．

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \mid A \text{ は可算集合 または } A^c \text{ は可算集合}\}$$

とするとき，$\mathcal{E}$ は X の σ-加法族であることを示せ．

$\boxed{\textbf{問 1.4}}$ $\mathcal{E}$ を空でない集合 X の有限加法族とする．$\mathcal{E}$ が σ- 加法族であるための必要十分条件は

$$B_1, B_2, \cdots, B_n \cdots \in \mathcal{E}, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ \ (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{E}$$

であることを示せ．

- X の部分集合列 $\{A_n\}$ に対して

  $$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

  と表す．

- $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ であるとき，これらを $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ と表す．

$\boxed{\textbf{問 1.5}}$ $\{A_n\}$ を空でない X の部分集合族とする．

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ を示せ．

(2) $\{A_n\}$ が単調増加：$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ であるとき

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \left(= \lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

であることを示せ．

(3) $\{A_n\}$ が単調減少：$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$ であるとき

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \left(= \lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

であることを示せ．

(4) $\mathcal{E}$ を X の σ-加法族とする．$\{A_n\}$ は $A_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすとき

$$\liminf_{n\to\infty} A_n, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

を示せ．

例 1.2

- $-\infty \le a \le b \le \infty$ に対して半開区間 $[a, b)$ を考える．ただし $a = b$ のときは $\emptyset$, $a = -\infty$, $b < \infty$ のときは $(-\infty, b)$ を表し，$-\infty < a < b = \infty$ のときは $[a, \infty)$, $a = -\infty$, $b = \infty$ のときは $\mathbb{R}$ とする．半開区間の有限個の和で表される $\mathbb{R}$ の部分集合を**区間塊**という．

- 区間塊の和集合は必ず共通部分のない和集合として表される．

  実際，$n = 2$ の場合で考える．$A = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2)$ について a_1, b_1, a_2, b_2 の中で b_2 が一番大きいとしてよい．このとき

$$\begin{aligned}
a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2), \\
a_1 < a_2 \le b_1 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = [a_1, b_2) \\
a_2 \le a_1 \le b_1 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = [a_2, b_2)
\end{aligned}$$

  となる．$n = 3$ の場合，$A = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup [a_3, b_3)$ とする．a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 の中で b_3 が一番大きいとしてよい．$n = 2$ の場合を用いて $[a_1, b_1) \cup [a_2, b_2)$ は $[\alpha_1, \beta_1) \cup [\alpha_2, \beta_2)$ と共通部分のない和集合で表される．このとき b_3 は α_1, β_1, α_2, β_2, a_3, b_3 の中で一番大きい．

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 < a_3 \le b_3 \Rightarrow &\quad A = [\alpha_1, \beta_1) \cup [\alpha_2, \beta_2) \cup [a_3, b_3), \\
\alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 < a_3 \le \beta_2 \le b_3 \Rightarrow &\quad A = [\alpha_1, \beta_1) \cup [\alpha_2, b_3), \\
\alpha_1 \le \beta_1 < a_3 \le \alpha_2 \le \beta_2 \le b_3 \Rightarrow &\quad A = [\alpha_1, \beta_1) \cup [a_3, b_3), \\
\alpha_1 < a_3 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \le b_3 \Rightarrow &\quad A = [\alpha_1, b_3), \\
a_3 \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \le b_3 \Rightarrow &\quad A = [a_3, b_3),
\end{aligned}$$

  一般の n についても同様である．

- $\mathcal{I}$ を区間塊全体とするとき $\mathcal{I}$ は $\mathbb{R}$ の有限加法族となる．

  (i) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \in \mathcal{I}$ である．

  (ii) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(-\infty, \infty)^c = \emptyset = [a, a) \int \mathcal{I}$，$(-\infty, b)^c = [b, \infty) \in \mathcal{I}$, $[a, \infty)^c = (-\infty, a) \in \mathcal{I}$，$[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty) \in \mathcal{I}$ である．
  次に $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ に対して $A = [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$ を考える． a_1, b_1, a_2, b_2 の中で b_2 が一番大きいとしてよい．このとき

$$\begin{aligned}
a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = \emptyset, \\
a_1 < a_2 \le b_1 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = [a_2, b_1) \\
a_2 \le a_1 \le b_1 \le b_2 \Rightarrow &\quad A = [a_1, b_1)
\end{aligned}$$

これより $-\infty \le a_i \le b_i \le \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して $\bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i) \in \mathcal{I}$ が成り立つ．最後に，$A = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)$ ならば De Morgan の法則より $A^c = \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i)^c$ であり，$[a_i, b_i)^c$ は半開区間であるから $A \in \mathcal{I}$ である．

(iii) $\mathcal{I}$ の定義から明らかである．

例 1.3 $-\infty \le a_i \le b_i \le \infty$ $(i = 1, \cdots, N)$ に対して半開区間 $[a_1, b_1) \times \cdots [a_N, b_N)$ を考える．ただし $[a_i, b_i)$ は $a_i = b_i$ のときは $\emptyset$, $a_i = -\infty$, $b_i < \infty$ のときは $(-\infty, b_i)$ を表し，$-\infty < a_i < b_i = \infty$ のときは $[a_i, \infty)$, $a_i = -\infty$, $b_i = \infty$ のときは $\mathbb{R}$ とする．半開区間の有限個の和で表される $\mathbb{R}^N$ の部分集合を**区間塊**という．例 1.2 と同様に $\mathbb{R}^N$ の区間塊全体 $\mathcal{I}_N$ は $\mathbb{R}^N$ の有限加法族である．

定義

X を空でない集合とし，$\mathcal{K} \subset 2^X$ とする．$\mathcal{K}$ を含む最小の σ-加法族を $\sigma[\mathcal{K}]$ とかき，$\mathcal{K}$ により**生成された σ -加法族**という．

注 $\sigma[\mathcal{K}]$ は次のように与えられる：

$$\sigma[\mathcal{K}] = \bigcap_{\mathcal{B}:\mathcal{B}\text{ は }\mathcal{K}\text{ を含む}\sigma\text{-加法族}} \mathcal{B}$$

実際，右辺で与えられる X の部分集合族を $\mathcal{F}$ とおく．まず $\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ を含む σ -加法族であることを見よう．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ を含むことは明らかである．次に σ-加法族であることを示す．

(i) $\mathcal{K}$ を含む任意の σ -加法族 $\mathcal{B}$ に対して $X \in \mathcal{B}$ であるから $X \in \mathcal{F}$ である．

(ii) $A \in \mathcal{F}$ とすると，$\mathcal{K}$ を含む任意の σ -加法族 $\mathcal{B}$ に対して $A \in \mathcal{B}$ である．$\mathcal{B}$ は σ-加法族であるから $A^c \in \mathcal{B}$ である．$\mathcal{B}$ は任意なので $A \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ とすると，$\mathcal{K}$ を含む任意の σ -加法族 $\mathcal{B}$ に対して

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{B}$$

ある．$\mathcal{B}$ は σ-加法族であるから $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}$ である．$\mathcal{B}$ は任意なので $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$

以上で $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることが示された．

次に $\mathcal{B}_0$ を $\mathcal{K}$ を含む任意の σ-加法族とする．$\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{F}$ の定義に現れる $\mathcal{B}$ の 1 つなので $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_0$ である．

以上より $\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ を含む最小の σ-加法族であることが示された．

定義

X を空でない集合とし，d を X 上の距離とする．距離空間 (X, d) の開集合全体を $\mathcal{O}$ とするとき，$\sigma[\mathcal{O}]$ を $\boldsymbol{\mathcal{B}(X)}$ と表し，距離空間 (X, d) の **Borel 集合族**, $\mathcal{B}(X)$ に属する X の部分集合を X の **Borel 集合**という．

- N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathcal{R}^N)$ や $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とするとき，Ω の開集合，つまり $\mathbb{R}^N$ の開集合 O を用いて $O \cap \Omega$ と表される集合全体 $\mathcal{O}_\Omega$ に対して $\sigma[\mathcal{O}_\Omega]$ を $\mathcal{B}(\Omega)$ と表す．これらはよく用いられる．

命題 1.1

$\mathbb{R}$ の区間塊全体 $\mathcal{I}$ に対して $\sigma[\mathcal{I}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つ．

証明

- まず半開区間 $[a,b)$ は

$$[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)$$

と表されるので $[a,b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．したがって $\sigma[\mathcal{I}] \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．

- 逆に任意の開集合 $O \subset \mathbb{R}$ をとると，任意の $x \in$ に対して $x \in (r_x, q_x), (r_x, q_x) \subset O$ なる $r_x, q_x \in \mathbb{Q}$ が存在する．したがって

$$\bigcup_{x \in O} (r_x, q_x) = O$$

が成り立つ．

- ここで，有理数 $r, q \in \mathbb{Q}$ を用いて (r,q) と表される開区間全体は可算集合であるから上の和集合も高々可算な和集合である．

- 次に，任意の開区間 (a,b) は

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$$

と表されるので

- したがって，$\mathcal{O} \subset \sigma[\mathcal{I}]$ である．したがって $\sigma[\mathcal{I}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．

命題 1.2

$\mathbb{R}^N$ の区間塊全体 $\mathcal{I}_N$ に対して $\sigma[\mathcal{I}_N] = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

証明 証明略

1.2 加法的集合関数

定義

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族とする．$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は $\mu(\emptyset) = 0$ を満たすとする．

(1) μ が**有限加法的（集合関数）**であるとは，

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

を満たすことである．

(2) μ が**完全加法的**あるいは**$\boldsymbol{\sigma}$-加法的（集合関数）**であるとは

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots, \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j),\ \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$
$$\Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

を満たすことである．

注 μ が完全加法的であれば有限加法的である．

命題 1.3

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族，$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は $\mu(\emptyset) = 0$ は完全加法的であるとする．このとき $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすならば

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成り立つ．このことを μ は **$\boldsymbol{\sigma}$ -劣加法的**であるという．

証明

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすとする．
- $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus B_2$, $B_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$, $\cdots$, $B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$ とすると $B_i \cap B_j = \emptyset\ (i \neq j)$ で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

が成り立つ（確かめよ）．さらに $\mu(B_n) \le \mu(A_n)$ が 成り立つ．

- μ は完全加法的であるから

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

を得る．□

問 1.6 X を空でない集合，$\mu \subset 2^X$ を有限加法族とする．$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ とする．次を示せ．

(1) $A,\, B \in \mathcal{A}$ が $A \subset B$ を満たすならば $\mu(A) \le \mu(B)$ が成り立つ．

(2) $A,\, B \in \mathcal{A}$ が $A \subset B$ で $\mu(B) < \infty$ ならば $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ が成り立つ．

(3) μ が有限加法的であるとする．$A_1,\ \cdots,\ A_n \in \mathcal{A}$ を満たすならば $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ を満たす．

(4) μ が有限加法的で $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \ne j)$ を満たし，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ を満たすならば $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ を満たす．

注 問 1.6 より，μ が $\mathcal{A}$ 上で

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成り立つ，つまり σ-劣加法的であるならば，μ は完全加法的である．

定義

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族，$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は有限加法的集合関数とする．

(1) μ が**有限**であるとは，$\mu(X) < \infty$ を満たすことである．

(2) μ が **σ -有限**であるとは

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots, \in \mathcal{A},\ \mu(X_n) < \infty \ \ (n = 1, 2, \cdots),\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たすことである．

$\boxed{\textbf{問 1.7}}$ $X = \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ が有限集合 または } A^c \text{ が有限集合}\}$$

とする.

(1) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ を

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & (A \text{ が有限集合}) \\ \infty & (A^c \text{ が有限集合}) \end{cases}$$

であるとき，μ は完全加法的であることを示せ.

(2) $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ を

$$\nu(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} & (A \text{ が有限集合}) \\ \infty & (A^c \text{ が有限集合}) \end{cases}$$

であるとき，ν は有限加法的であるが完全加法的であることを示せ.

命題 1.4

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族，$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は有限加法的集合関数とする．次の (i) と (ii) は同値である.

(i) μ が完全加法的である.

(ii) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ と $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすならば

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

が成り立つ.

$\boxed{\textbf{証明}}$

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ を満たし $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ とする.
- $\mu(A_{n_0}) = \infty$ となる n_0 があれば，$\mu(A_n) = \infty$ $(n \geq n_0)$ であるから自明である．したがって，すべての n に対して $\mu(A_n) < \infty$ とする.
- $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$, $B_0 = A_1$ とおく．このとき $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ を満たす（確かめよ）．このとき $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ である（確かめよ）.

- このとき

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}B_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(B_i)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\{\mu(A_{i+1})-\mu(A_i)\}+\mu(A_1)\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

よって (ii) を得る．

(ii)⇒(i)

- (ii) を仮定する．$A_1, A_2, \cdots .\ A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ が $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすとする．

- $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とおくと $B_n \in \mathcal{A}$ で，$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \cdots$ を満たす．さらに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

を満たす（確かめよ）．

- (ii) と μ が有限加法的であることから

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

である．したがって μ は完全加法的である．□

命題 1.5

X を空でない集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$ を有限加法族，$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は完全加法的集合関数とする．このとき $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$，$\mu(A_1) < \infty$ および $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$$

が成り立つ．

証明

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$，$\mu(A_1) < \infty$ および $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ とする．

- $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, $B_0 = A$ とすると $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ であり（確かめよ）

$$A_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

が成り立つ.

- μ は完全加法的であるから

$$\begin{aligned} \mu(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})\} + \mu(A) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n) + \mu(A)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) + \mu(A) \end{aligned}$$

である.

- $\mu(A_1) < \infty$ であるから両辺 $\mu(A_1)$ を引いて整理すると

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

が成り立つ. □

1.3　測度と測度空間

定義

X を空でない集合，$\mathcal{F} \subset 2^X$ を σ -加法族，$\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ が完全加法的集合関数であるとき μ を $\mathcal{F}$ 上の**測度**といい，$(X,\mathcal{F},\mu)$ を**測度空間**という.
さらに $\mu(X) = 1$ のとき μ を**確率測度**といい，$(X,\mathcal{F},\mu)$ を**確率空間**という.

定義

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間とする.

(1) μ が**有限**であるとは，$\mu(X) < \infty$ を満たすことである.

(2) μ が **$\boldsymbol{\sigma}$ -有限**であるとは

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots, \in \mathcal{F},\ \mu(X_n) < \infty \ \ (n = 1, 2, \cdots),\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たすことである.

(3) μ が**完備**であるとは，$A \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = 0$ を満たせば，任意の $B \subset A$ が $B \in \mathcal{F}$ を満たすことである.

問 1.8 X を空でない集合とする．

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

とおくとき，μ は 2^X における測度であることを示せ．δ_x を x における **Dirac 測度**という．

問 1.9 X を空でない集合とする．$A \subset X$ に対して

$$\mu^{\#}(A) = \begin{cases} \#A & (A \text{ が有限集合}) \\ \infty & (A \text{ が無限集合}) \end{cases}$$

とおくとき，$\mu^{\#}$ は 2^X における測度であることを示せ．$\mu^{\#}$ を 2^X における**数え上げ測度 (counting measure)** という．

- 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ において，$\mu(N) = 0$ となる $N \in \mathcal{F}$ を**零集合**という．

問 1.10 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ において，$E_1, \cdots, E_n, \cdots \in \mathcal{F}$ を零集合の列とする．このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

も零集合であることを示せ．

定義

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{F}$ とする．

$$(\mu \llcorner A)(B) = \mu(A \cap B)$$

と定義する．$\mu \llcorner A$ を μ の A への**制限**という．

問 1.11 上の定義において，$\mu \llcorner A$ は $\mathcal{F}$ における測度であることを示せ．

命題 1.5

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

が成り立つ．特に $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = m\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$ が成り立つ．

証明

- $L = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ とおくと $\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}_n$ は単調減少である.
- $\mu(A_k) \leq \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ $(k \geq n)$ であるから $\sup_{k\geq n} \mu(A_k) \leq \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ である.
- μ は有限で命題 1.5 より

$$\mu(L) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mu(A_k) = \limsup_{n\to\infty} A_n \tag{1.1}$$

  が成り立つ.
- $M = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ とおくと $\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}_n$ は単調増加である.
- $\mu(A_k) \geq \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ $(k \geq n)$ であるから $\inf_{k\geq n} \mu(A_k) \leq \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ である.
- 命題 1.4 より

$$\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mu(A_k) = \liminf_{n\to\infty} A_n \tag{1.2}$$

  が成り立つ.
- (1.1), (1.2) および上極限と下極限の大小関係から結論を得る. □

注 $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$ は μ が有限測度でなくても成り立つ.

補題 1.6(Borel-Cantelli の補題)

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間, $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たすとする. このとき

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

が成り立つ.

証明

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ より $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A_k = 0$ である.
- $L = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ とおくと $\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}_n$ は単調減少である.

- μ の σ-劣加法性より任意の n に対し

$$\mu(L) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)$$

  が成り立つ．$n \to \infty$ として結論を得る．$\square$