10 Stampacchiaの定理とLax-Milgramの定理

- 先に述べたある種の境界値問題の弱解の存在と一意性を得るための基礎となるヒルベルト空間上の存在定理について学ぶ.
- H を実 Hilbert 空間とする.

定義

- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ が**双線形形式**であるとは，任意の $u \in H$ に対して $a(u, \cdot)$ および $a(\cdot\,, u)$ が線形汎関数となることである.
- 双線形形式 a が**有界**であるとは，ある定数 $M \geq 0$ が存在して

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad (u, v \in H)$$

 が成り立つことである.
- 双線形形式 a が**強圧的**であるとは，ある定数 $\alpha > 0$ が存在して

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad (u \in H)$$

 が成り立つことである.

定理 10.1(Stampacchia の定理)

$a : H \times H \to \mathbb{R}$ を有界，強圧的な双線形形式であるとする．$K \subset H$ を空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $\varphi \in H^*$ に対して，ただ1つの $u \in K$ が存在して

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad (v \in K) \tag{10.1}$$

が成り立つ.
さらに a が対称つまり，$a(u,v) = a(v,u)$ $(u, v \in H)$ が成り立つとき，上の $u \in K$ は

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\right\} \tag{10.2}$$

となる $u \in K$ で特徴付けられる.

- この定理の証明のために次の定理を思い出そう.

定理 10.2(Banach の不動点定理)

(X,d) を完備距離空間とし，$S:X\to X$ を縮小写像，つまりある $r\in[0,1)$ が存在して

$$d(Sv_1,Sv_2)\le rd(v_1,v_2)\quad(v_1,v_2\in X)$$

を満たすとする．このとき S は X にただ 1 つの不動点をもつ．

定理 10.3（閉凸集合への射影）

H を実 Hilbert 空間，$K\subset H$ を空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $x\in H$ に対して

$$\|x-x^*\|=\inf_{z\in K}\|x-z\|$$

を満たす $x^*\in K$ がただ 1 つ存在する．この x^* は

$$(y-v,x-v)\le 0\quad(y\in K)$$

を満たす $v\in K$ として特徴付けられる．
このとき $x\in H$ に対して上で定まる $x^*\in K$ を対応させる作用素を P_K と表す：$x^*=P_Kx$
さらに P_K は次を満たす：

$$\|P_Kx_1-P_K\|\le\|x_1-x_2\|\quad(x_1,x_2\in K)$$

定理 10.1 の証明

- $\varphi\in H^*$ を任意にとると，Riesz の表現定理により，ただ 1 つの $f\in H$ が存在して

$$\langle\varphi,v\rangle=(f,v)\quad(v\in H)$$

  が成り立つ．

- 次に，任意に $u\in H$ を固定すると $v\mapsto a(u,v)$ は H 上の有界線形汎関数である．したがって，Riesz の表現定理により

$$a(u,v)=(u^*,v)\quad v\in H$$

  となる u^* がただ 1 つ存在する．この u^* は u に対してただ 1 つ定まるので Au と表す:$a(u,v)=(Au,v)$

- $A:H\to H$ は線形作用素で a の有界性から

$$\|Au\|^2=(Au,Au)=a(u,Au)\le M\|u\|\|Au\|$$

が成り立つが，$\|Au\| = 0$ の場合も含め

$$\|Au\| \leq M\|u\| \quad (u \in H) \tag{10.3}$$

が成り立つ．

- a の強圧性により

  $$(Au, u) = a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2 \tag{10.4}$$

  を得る．

- (10.6) は

  $$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad (v \in K)$$

  を満たす $u \in K$ の存在を示すことと同値である．$\rho > 0$ を定数とするとさらに次のことと同値である：

  $$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0 \quad (v \in K) \tag{10.5}$$

  つまり

  $$u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$$

- $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$ とおくと $S : K \to K$ は $\rho > 0$ を適当にとると縮小写像になることを示す．

- $v_1, v_2 \in K$ とすると P_K の性質から

  $$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\| \\ &\leq \|v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2)\|\end{aligned}$$

  を得る．よって

  $$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(v_1 - v_2, Av_1 - Av_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\alpha\rho\|v_1 - v_2|^2 + M^2\rho^2\|v_1 - v_2\|^2 \\ &= (1 - 2\alpha\rho + M^2\rho)\|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

  を得る．したがって $\rho > 0$ を十分小さくとると $1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2 < 1$ となるので S は縮小写像となる．

- 次に a が対称とする．このとき $a(\cdot, \cdot)$ は H 上の内積となり，対応するノルムは $\|\cdot\|$ と同値となる．

- 任意の $\varphi \in H^*$ に対して Riesz の表現定理より，ただ 1 つの $g \in H$ が存在して

  $$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v) \quad (v \in H)$$

  が成り立つ．したがって (10.6) を満たす $u \in K$ を見つけることは

  $$a(g - u, v - u) \leq 0 \quad (v \in K)$$

  を満たす $u \in K$ を見つけることと同値である．

- これのような $u \in K$ は $a(\cdot, \cdot)$ を内積とみた K への射影定理により得られる．この u は

  $$\inf_{v \in K} a(g - v, g - v)^{1/2}$$

  を達成する v として特徴付けられる．

- これは $v \mapsto a(g - v, g - v)$ を最小にする v として特徴付けられるが

  $$\begin{aligned} a(g - v, g - v) &= a(g, g) - 2a(g, v) + a(v, v) \\ &= a(g, g) - 2\langle \varphi, v \rangle + a(v, v) \\ &= a(v, v) - 2\langle \varphi, v \rangle + a(g, g) \end{aligned}$$

  であるから v は

  $$\frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$$

  を最小にする v として特徴付けられる．□

定理 10.4（Lax-Milgram の定理）

$a : H \times H \to \mathbb{R}$ を有界，強圧的な双線形形式であるとする．このとき，任意の $\varphi \in H^*$ に対して，ただ 1 つの $u \in K$ が存在して

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad (v \in H) \tag{10.6}$$

が成り立つ．
さらに a が対称つまり，$a(u, v) = a(v, u)$ $(u, v \in H)$ が成り立つとき，上の $u \in H$ は

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \tag{10.7}$$

となる $u \in H$ で特徴付けられる．

証明

- $K = H$ とおき，定理 10.1 を用いると，ただ 1 つの $u \in H$ が存在して

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad (v \in H)$$

  が成り立つ．

- $v \in H$ を任意に固定すると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &a(u, tv-u) \geq \langle \varphi, tv-u \rangle \\ &ta(u, v) - a(u, u) \geq t\langle \varphi, v \rangle - \langle \varphi, u \rangle \end{aligned}$$

- $t > 0$ として両辺 t で割り，$t \to \infty$ とすると $a(u, v) \geq \langle \varphi, v \rangle$ を得る．$t < 0$ として t で割り，$t \to -\infty$ とすると $a(u, v) \leq \langle \varphi, v \rangle$ を得る．したがって $a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle$ を得る．□