9 Sobolev 空間 $W^{m,p}$, $W_0^{1,p}$

- 高階の弱微分に関する Sobolev 空間を定義しよう．

定義

$1 \leq p \leq \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．$u \in L^p(\mathbb{R})$ に対して，$v_1, \cdots, v_m \in L^p(I)$ が存在して

$$\int_I u\varphi^{(k)}dx = (-1)^k \int_I v_m \varphi dx \quad ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(I))$$

が成り立つとき，$u \in W^{m,p}(I)$ であるという．このとき v_k を u の k 階弱微分といい，$u^{(k)}$ あるいは $D^k u$ と表す．

定理 9.1

$1 \leq p \leq \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ とする．$W^{m,p}(I)$ は

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{k=1}^m \|D^k u\|_{L^p(I)}$$

をノルムとして Banach 空間となる．

注 $W^{m,p}(I)$ は

$$\left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \sum_{k=1}^m \|D^k u\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p}$$

としてもノルムとなり，先に述べた $\|u\|_{W^{m,p}(I)}$ と同値なノルムとなる．

- $W^{m,2}(I)$ を $H^m(I)$ と表す．

定理 9.2

$H^{m,p}(I)$ は

$$(u,v)_{H^m(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + \sum_{k=1}^m (D^k u, D^k v)_{L^2(I)}$$

を内積として Hilbert 空間となる．

- $u \in W^{1,p}(I)$ とすると定理 5.2 より $u \in C(\overline{I})$ 正確には u と a.e. 等しい $C(\overline{I})$ の関数が存在する．さらに $u' \in C(\overline{I})$ つまり u' と a.e. 等しい連続関数が存在するとすると定理 5.2 より

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad (x, y \in \overline{I})$$

であるから $u \in C^1([a,b])$ となる．

- $u \in W^{2,p}(I)$ とすると $u' \in W^{1,p}(I)$ であるから $u' \in C(\bar{I})$ である．よって $u \in C^1(\bar{I})$ となる．

定義

$1 \leq p < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．$C_c^\infty(I) \subset W^{1,p}(I)$ であるが，$C_c^\infty(I)$ の $W^{1,p}(I)$ における閉包を $W_0^{1,p}(I)$ と表す．具体的には $u \in W_0^{1,p}(I)$ であるとは，ある $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(I)$ が存在して $\|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ が成り立つことである．$W_0^{1,2}(I)$ を $H_0^1(I)$ と表す．

注

- $W_0^{1,p}(I)$ は $W^{1,p}(I)$ のノルムで Banach 空間となる W
- $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$
- 正則化列を用いることにより $W_0^{1,p}(I)$ は $C_c^1(I)$，つまり台が I のコンパクト集合であるような C^1 級関数全体の閉包としてよい．

定理 9.3

$u \in W^{1,p}(I)$ とする．$u \in W_0^{1,p}(I) \Leftrightarrow u = 0$ on ∂I

注 この意味で $W_0^{1,p}(I)$ は I の境界で 0 という境界条件を備えた Sobolev 空間であるといえる．

証明 $(\Rightarrow)$

- $u \in W_0^{1,p}(I)$ とすると $\|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ となる $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(I)$ が存在する．
- 定理 8.1 より $\{\varphi_n\}$ は u に $\bar{I}$ 上で一様収束するので ∂I 上 $u = 0$ となる．

$(\Leftarrow)$

- $u \in W^{1,p}(I)$ とする．$u \in C(\bar{I})$ とみなしてよく，∂I で $u = 0$ とする．
- $G \in C^1(\mathbb{R})$ を

$$G(t) = \begin{cases} 0 & |t| \leq 1 \\ t & |t| \geq 2 \end{cases}$$

  かつ $|G(t)| \leq |t|$ $(t \in \mathbb{R})$ を満たすものとする．このとき $|G'(t)| \leq C$ となる $C \geq 0$ が存在する．

- $u_n = \dfrac{1}{n} G(nu)$ とおくと命題 8.5 より $u_n \in W^{1,p}(I)$ である．
- さらに

$$\mathrm{supp} u_n \subset \{x \in I \mid |u(x)| \geq 1/n\}$$

  である．∂I 上 $u = 0$ であることと，$u(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ （系 8.3）より $\mathrm{supp} u_n$ は I のコンパクト集合である．したがって $u_n \in C_c^1(I)$ である．

- $|u_n(x)| \le |u(x)|$, $u_n'(x) = G'(nu(x))u'(x)$ より $|u_n'(x)| \le C|u'(x)|$ が成り立つので

$$\begin{aligned} &|u_n(x) - u(x)|^p \le (|u_n(x)| + |u(x)|)^p \le 2^p|u(x)| \\ &|u_n'(x) - u'(x)|^p \le (|u_n'(x)| + |u'(x)|)^p \le (C+1)^p|u'(x)|^p \end{aligned} \tag{9.1}$$

を得る．

- さらに

$$u_n(x) \to u(x), u_n'(x) \to u'(x) \tag{9.2}$$

が成り立つ．実際，$u(x) = 0$ のとき $u_n(x) = 0$, $u_n'(x) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．$|u(x)| > 0$ のときは，$n_0(x) \in \mathbb{N}$ があって

$$n \ge n_0 \ \Rightarrow \ \ u_n(x) = \frac{1}{n}G(nu(x)) = u(x), \ \ u_n'(x) = G'(nu(x))u'(x) = u'(x)$$

であるからである．

- (9.1), (9.2) から Lebesgue の収束定理より $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ となる．したがって $u \in W_0^{1,p}(I)$ である．□

注 $1 \le p < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ を開集合とする．$u \in W_0^{1,p}(I)$ とする．このとき

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

とするとき $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ である．

定理 9.4(Poincaré の不等式)

$1 \le p < \infty$ とし $I \subset \mathbb{R}$ を有界開区間とする．このとき，I の長さにのみ依存する定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u\|_{L^p(I)} \le C\|u'\|_{L^p(I)} \ \ (u \in W_0^{1,p}(I))$$

が成り立つ．

証明

- $I = (a, b)$ とする．$\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して示す．

- $1 < p < \infty$ のとき $\varphi(a) = 0$ だから微積分の基本定理と Hölder の不等式より

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(a)| = \left| \int_a^x \varphi'(t)dt \right| \le \int_a^b |\varphi'(t)|dt \le (b-a)^{1/p'}\|\varphi'\|_{L^p(I)}$$

両辺 p 乗して積分すると

$$\|\varphi\|_{L^p(I)}^p \le (b-a)^p\|\varphi'\|_{L^p(I)}^p$$

つまり

$$\|\varphi\|_{L^p(I)} \leq (b-a)\|\varphi'\|_{L^p(I)}$$

を得る．$p=1$ のときは

$$|\varphi(x)| \leq \int_a^b |\varphi'(t)|dt$$

の両辺を積分すれば $\|\varphi\|_{L^1(I)} \leq (b-a)\|\varphi'\|_{L^1(I)}$ を得る．

- 次に $u \in W_0^{1,p}(I)$ のとき $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(I)$ があって $\|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ を得る．このとき

$$\|\varphi_n\|_{L^p(I)} \leq (b-a)^p\|\varphi_n'\|_{L^p(I)}$$

が成り立つ．$\|\varphi_n\|_{L^p(I)} \to \|u\|_{L^p(I)}$, $\|\varphi_n'\|_{L^p(I)} \to \|u\|_{L^p(I)}$ より上の式で $n \to \infty$ とすれば

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq (b-a)^p\|u'\|_{L^p(I)}$$

を得る．□

注 Poincaré の不等式より

$$\|u'\|_{L^p(I)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p} \leq (C+1)\|u'\|_{L^p(I)} \quad (u \in W_0^{1,p}(I))$$

が成り立つので $\|u'\|_{L^p(I)}$ は $W_0^{1,p}(I)$ において $\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ と同値なノルムを定める．