7　滑らかな関数による近似

定理 7.1

$1 \leq p < \infty$, I を開区間，$u \in W^{1,p}(I)$ とする．このとき $\{u_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ が存在して，$u_n|_I \to u$ in $W^{1,p}(I)$ が成り立つ．

- これを証明するために次の準備をする．

補題 7.2

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ に対して $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ であり，

$$(\rho * v)' = \rho * v'$$

が成り立つ．

証明

- Young の不等式（定理 3.1）より $\rho * v \in L^p(\mathbb{R})$ である．
- $\rho(x - \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であることに注意すると，命題 3.2 より $\rho * v \in C^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\begin{aligned}(\rho * v)'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\rho(x-y)v(y) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy}\rho(x-y)v(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)v'(y)dy = (\rho * v')(x)\end{aligned}$$

  を得る．
- 再び Young の不等式から $\rho * v' \in L^p(\mathbb{R})$ であるので $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ である．
  □

補題 7.3

$\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \leq \zeta \leq 1$ なる関数で

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 2) \end{cases}$$

なる関数とする．$\zeta_n(x) = \zeta(x/n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく．$1 \leq p < \infty$ に対して $f \in L^p(\mathbb{R})$ とすると $\zeta_n f \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$ が成り立つ．

証明 練習問題とする．

定理 7.1 の証明

- 拡張定理により $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ と仮定してよい．

- $\{\rho_n\}$ を正則化列，ζ, ζ_n を補題 7.3 のように定める．このとき $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ とおくとき，$\{u_n\}$ が求めるものであることを示す．補題 7.2 より $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であることに注意する．

- まず $\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ を示す．実際，命題 3.4 と補題 7.3 より

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|\zeta_n(\rho_n * u) - \zeta_n u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0\end{aligned}$$

  を得る．

- 次に $\|u_n' - u'|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ を示す．まず，補題 7.2 より

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u')$$

  である．

- 次に

$$|\zeta_n'(x)| = \frac{1}{n}\left|\zeta'\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{\|\zeta'\|_{L^\infty}}{n}$$

  と Young の不等式により

$$\|\rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

  に注意すると，命題 3.4 より

$$\begin{aligned}\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq |\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - \zeta_n u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{\|\zeta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{n}\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n * u') - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\to 0\end{aligned}$$

  を得る．以上で示された．□

8 埋め込み定理とSobolev空間の元の緒性質

8.1 埋め込み定理

- この節では，Sobolev 空間に属する関数がいつ滑らかな関数と（a.e. の意味で等しく）なるかを与える Sobolev の埋め込み定理について述べる．

定理 8.1

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間，$1 \le p \le \infty$ とする．区間 I の Lebesgue 測度 $m(I)$ にのみ依存する定数 $C \ge 0$ が存在して

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad ({}^\forall u \in W^{1,p}(I))$$

が成り立つ．

注 上の命題は $u \in W^{1,p}(I)$ に対して $\tilde{u} \in L^\infty(I)$ がただ1つ存在して，$u(x) = \tilde{u}(x)$ a.e. $x \in I$ なり，$u \in W^{1,p}(I)$ に対して $\tilde{u} \in L^\infty(I)$ を対応させる作用素が有界線形作用素であることを意味する．このことを**埋め込み**あるいは**単射 $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ は連続である**という．

証明 $p = \infty$ のときは自明であるので $1 \le p < \infty$ とする．

$I = \mathbb{R}$ の場合

- まず $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ とする．$1 \le p < \infty$ に対して $G(s) = |s|^{p-1}s$ とすると $w = G(v) \in C_c^1(\mathbb{R})$ であり

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'$$

が成り立つ．

- 微分積分学の基本定理から

$$w(x) = \int_{-\infty}^x w'(t)dt = \int_{-\infty}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

であり，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}|v(x)|^p &\le p\left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^p dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

このことと $\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|v\|_{W^{1,p}(I)}$ かつ $\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|v\|_{W^{1,p}(I)}$ から $|v(x)|^p \le p\|u\|_{W^{1,p}(I)}^p$ が成り立つ．$p^{1/p} \le e^{1/e}$ に注意すると

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C\|v\|_{W^{1,p}(I)} \quad ({}^\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R})) \tag{8.1}$$

が成り立つ．

- 次に $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ とすると，定理 7.1 より $\{u_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ があって $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to 0$ が成り立つ．よって，(8.1) により $\{u_n\}$ は $L^\infty(\mathbb{R})$ の Cauchy 列である．$L^\infty(\mathbb{R})$ は完備であるので，$\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$ があって $\|u_n - \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$ が成り立つ．このとき $u(x) = \tilde{u}(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$ もわかる．

  実際，任意の $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} (u-\tilde{u})\varphi dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} |u-u_n||\varphi| dx + \int_{\mathbb{R}} |u_n - \tilde{u}||\varphi| dx\right| \\ &\leq \|u-u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} + \|u_n-\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0\end{aligned}$$

  であるからである．よって (8.1) はすべての $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ．

$I \subset \mathbb{R}$ の場合

- 定理 6.1（拡張定理）より，有界線形作用素 $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ とある定数 $C_1 > 0$ があって（C_1 は p に依存しない）

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad ({}^\forall u \in W^{1,p}(I))$$

  が成り立つ．

- $I = \mathbb{R}$ の場合より，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad ({}^\forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}))$$

  が成り立つ．

- したがって任意の $u \in W^{1,p}(I)$ に対して

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq CC_1\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

  を得る．□

定理 8.2

$I \subset \mathbb{R}$ 有界開区間とする．

(i) $1 < p \leq \infty$ のとき埋め込み $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ はコンパクトである，つまり，$W^{1,p}(I)$ の有界列は $C(\overline{I})$ で収束する部分列ををつ．

(ii) $1 \leq q < \infty$ に対して埋め込み $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ はコンパクトである，つまり，$W^{1,1}(I)$ の有界列は $L^q(I)$ で収束する部分列をもつ．

証明 (i) のみ証明をし，(ii) は補足で述べる．

- 定理 5.2 より，$u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ と $x, y \in \overline{I}$ に対して

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)dt\right| &\leq \|u'\|_{L^p(I)}\left(\int_y^x dt\right)^{1/p'} \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}|x-y|^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{8.2}$$

  である．

- 次に $\{u_n\} \subset W^{1,p}(I)$ を有界列とすると，ある $M > 0$ があって $\|u_n\|_{W^{1,p}(I)} \leq M$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．

- 定理 5.2 より $\{u_n\} \subset C(\overline{I})$ である．また，定理 8.1 より

$$\|u_n|_{C(\overline{I})} = \|u_n\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u_n\|_{W^{1,p}(I)} \leq CM$$

を得る．したがって $\{u_n\} \subset C(\overline{I})$ は一様有界である．

- 次に (8.2) に対して，$x,\, y \in \overline{I}$ に対して

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \|u_n\|_{W^{1,p}(I)}|x - y|^{1-\frac{1}{p}} \leq M|x - y|^{1-\frac{1}{p}}$$

を得る．これは $\{u_n\} \subset C(\overline{I})$ が同程度一様連続であることを示している．

- Ascoli-Arzelá の定理より $\{u_n\}$ は $C(\overline{I})$ で収束する部分列をもつ．□

8.2 Sobolev 空間の元の性質

系 8.3

$1 \leq p < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ は非有界開区間とする．$u \in W^{1,p}(I)$ ならば

$$\lim_{x \in I, |x| \to \infty} u(x) = 0$$

が成り立つ．

証明

- $u \in W^{1,p}(I)$ とする．定理 7.1 より，$\{u_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ があって $\|u_n|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ が成り立つ．

- 定理 8.1 より $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$ が成り立つ．

- 任意の $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $\|u_{n_0} - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon$ が成り立つ．

- $u_{n_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ より，ある $M > 0$ があって $|x| > M$ ならば $u_{n_0}(x) = 0$ $(|x| > M)$ が成り立つ．

- したがって $x \in I$, $|x| > M$ ならば $|u(x)| \leq |u(x) - u_{n_0}(x)| + |u_{n_0}(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．□

命題 8.4(積の微分)

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間，$1 \leq p \leq \infty$ とする．$u, v \in W^{1,p}(I)$ に対して $uv \in W^{1,p}(I)$ で

$$(uv)' = u'v + uv'$$

が成り立つ．さらに，次の部分積分の公式が成り立つ：

$$\int_y^x u'vdt = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'dt$$

証明

- 定理 8.1 より $u,\, v \in L^\infty(I)$ であるから $uv \in L^p(I)$ であることに注意．　実際
$$\int_I |uv|^p dx \leq \|u\|_{L^\infty(I)}^p \int_I |v|^p dx < \infty$$
である．同様に $u'v,\, uv' \in L^p(I)$ である．

$1 \leq p < \infty$ の場合

- 定理 7.1 より $\{v_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ があって $\|v_n|_I - v\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ が成り立つ．このとき
$$\|uv_n - uv\|_{L^p(I)} = \|u(v_n - v)\|_{L^p(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \|v_n - v\|_{L^p(I)} \to 0 \tag{8.3}$$
を得る．つまり $\|uv_n - uv\|_{L^p(I)} \to 0$ が成り立つ．同様に $\|uv_n' - uv'\|_{L^p(I)} \to 0$ が成り立つ．

- 次に定理 8.1 より $\|v_n - v\|_{L^\infty(I)} \to 0$ が成り立つので
$$\|u'v_n - u'v\|_{L^p(I)} = \|u'(v_n - v)\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} \|v_n - v\|_{L^\infty(I)} \to 0 \tag{8.4}$$
を得る．

- よって任意の $\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して
$$\int_I uv_n\varphi' dx \to \int_I uv\varphi' dx \tag{8.5}$$
が成り立つ．

- また v_n, φ は滑らかな関数なので $v_n\varphi' = (v\varphi)' - v_n'\varphi$ より
$$\begin{aligned}
& \int_I uv_n\varphi' dx \\
= & \int_I u\{(v_n\varphi)' - v_n'\varphi\} dx \\
= & \int_I u(v_n\varphi)' dx - \int_I uv_n'\varphi dx \\
= & -\int_I u'v_n\varphi dx - \int_I uv_n'\varphi dx \;\; (\text{弱微分の定義，} v_n\varphi \in C_c^\infty(I)) \\
\to & -\int_I u'v\varphi dx - \int_I uv'\varphi dx \;\; (\because (8.3), (8.4))
\end{aligned} \tag{8.6}$$

- (8.5), (8.6) より
$$\int_I uv\varphi' dx = -\int_I (u'v+uv')\varphi dx$$
である．したがって $uv \in W^{1,p}(I)$ で $(uv)' = u'v + uv'$ が得られる．

$p=\infty$ の場合

- $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ とすると $uv \in L^\infty(I)$ かつ $u'v+uv' \in L^\infty(I)$ である．あとは任意の $\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して
$$\int_I uv\varphi' dx = -\int_I (u'v+uv')\varphi dx \tag{8.7}$$
を示せばよい．

- $\varphi \in C_c^\infty(I)$ を任意に固定する．supp$\varphi J \subset \overline{J} \subset I$ なる有界開区間 J をとる (supp が I のコンパクト集合なのでこのような J をとれる)．このとき任意の $q \in (1,\infty)$ に対して $u, v \in W^{1,q}(J)$ である．

- 先に示したことから
$$\int_J uv\varphi' dx = -\int_J (u'v+uv')\varphi dx$$
である．$I \setminus J$ で φ, φ' は0であるので (8.7) を得る．

- 部分積分の公式は定理5.2より従う．□

命題8.5(合成関数の微分)

$G \in C^1(\mathbb{R})$ は $G(0)=0$ を満たすとする．$u \in W^{1,p}(I)$ とする．このとき $G\circ u \in W^{1,p}(I)$ であり
$$(G\circ u)' = G'(u)u'$$
が成り立つ．

証明

- $u \in W^{1,p}(I)$ とする．定理8.1より $u \in L^\infty(I)$ であるので $M = \|u\|_{L^\infty(I)}$ とおく．

- ある $C>0$ があって
$$|G'(s)| \le C \quad (s \in [-M-1, M+1]) \tag{8.8}$$
$$|G(s)| \le C|s| \ (s \in [-M-1, M+1]) \tag{8.9}$$
$$|G(s_1)-G(s_2)| \le C|s_1-s_2| \ (s_1, s_2 \in [-M-1, M+1]) \tag{8.10}$$
が成り立つ．

- (8.9) より $G(u) \in L^p(I)$ が成り立つ．また，$G'(u) \in L^\infty(I)$ であるから $G'(u)u' \in L^p(I)$ である．

- 任意の $\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して

$$\int_I G(u)\varphi' dx = -\int_I G'(u)u'\varphi dx \tag{8.11}$$

を示せばよい．

<u>**$1 \le p < \infty$ の場合**</u>

- 定理 7.1 より $\{u_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ があって $\|u_n|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ が成り立つ．$G(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ より，滑らかな関数の部分積分の公式より

$$\int_I G(u_n)\varphi' dx = -\int_I G'(u_n)u_n'\varphi dx \tag{8.12}$$

- 定理 8.1 より $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$ より，十分大きな n に対して $\|u_n\|_{L^\infty(I)} \le \|u\|_{L^\infty(I)}+1$ が成り立ち，(8.10) より $\|G(u_n)-G(u)\|_{L^\infty(I)} \le C\|u_n-u\|_{L^\infty(I)} \to 0$ であるから

$$\int_I G(u_n)\varphi' dx \to \int_I G(u)\varphi' dx \tag{8.13}$$

が成り立つ．

- 次に

$$G'(u_n)u_n' - G'(u)u' = G'(u_n)(u_n' - u') + (G'(u_n) - G'(u))u'$$

である．

- 第 1 項について

$$\left|\int_I G'(u_n)(u_n' - u')\varphi dx\right| \le C\|u_n' - u'\|_{L^p(I)}\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \to 0$$

が成り立つ．したがって任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって

$$n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_I G'(u_n)(u_n' - u')\varphi dx\right| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- 次に G' は $[-M, M]$ で一様連続であるから，上で定めた $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ があって

$$s_1, s_2 \in [-M, M], \quad |s_1 - s_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |G'(s_1) - G'(s_2)| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって $n_1 \in \mathbb{N}$ があって

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \delta$$

が成り立つ．よって

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad |G'(u_n) - G'(u)| < \varepsilon \ \text{ a.e. } x \in I$$

が成り立つ．

- よって $n \geq n_1$ ならば

$$\left|\int_I \{G'(u_n) - G'(u)\} u' \varphi dx\right| \leq \varepsilon \|u'\|_{L^p(I)} \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}$$

を得る．よって $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ならば

$$\left|\int_I G'(u_n) u_n' \varphi dx - \int_I G'(u) u' \varphi dx\right| < (1 + \|u'\|_{L^p(I))} \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}) \varepsilon$$

を得る．これは

$$\int_I G'(u_n) u_n' \varphi dx \to \int_I G'(u) u' \varphi dx \tag{8.14}$$

を意味する．

- (8.12), (8.13), (8.14) より (8.11) を得る．

$p = \infty$ の場合 命題 8.4 と同様に示すことができる．

8.3 補足：定理 8.2(ii) の証明

補題 8.6（補間不等式）

$1 \leq p \leq q \leq \infty$ とし，$f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ ならば，$r \in [p, q]$ に対して $f \in L^r(\Omega)$ であり

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

とするとき

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}$$

が成り立つ．

証明

- $q < \infty$ の場合を示す．

- $\dfrac{1}{\frac{p}{\theta r}} + \dfrac{1}{\frac{q}{(1-\theta)r}} = 1$ であり

$$\int_\Omega |f|^{\theta r \frac{p}{\theta r}} = \int_\Omega |f|^p dx < \infty, \ \int_\Omega |f|^{(1-\theta)r \frac{q}{(1-\theta)r}} = \int_\Omega |f|^q dx < \infty,$$

であるので Hölder の不等式より

$$\int_\Omega |f|^r dx = \int_\Omega |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx \le \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}$$

つまり $\|f\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}$ を得る．

- $r < q = \infty$ の場合，$\theta r = p$ より

$$\int_\Omega |f|^r dx = \int_\Omega |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx \le \|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)r} \|f\|_{L^p}^{\theta r}$$

である．□

定理 8.2(ii) の証明

- 定理 3.8（Frechet-Kokmogorov の定理）を用いる．

- $\mathcal{H}$ を $W^{1,1}(I)$ の有界集合とする．P を拡張作用素とし $\mathcal{F} = P(\mathcal{H}) \subset W^{1,1,}(\mathbb{R})$ とおく．このとき

$$\mathcal{F}|_I = \{f|_I : f \in \mathcal{F}\} = \mathcal{H}$$

である．

- 拡張作用素 P は有界線形作用素であるから $\mathcal{F}$ は $W^{1,1}(\mathbb{R})$ の有界集合である．

- 定理 8.1 より $\mathcal{F}$ は $L^\infty(\mathbb{R})$ の有界集合である．そして補題 8.6 より任意の $q \in (1, \infty)$ に対して $\mathcal{F}$ は $L^q(\mathbb{R})$ の有界集合である．

- 定理 3.8 の (ii) の条件をチェックしよう．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．

- 定理 8.6（$p = 1$ は (i)⇒ (ii) でも ok）より，$C = \sup\{\|u\|_{W^{1,1}}(\mathbb{R}) \mid u \in \mathcal{F}\}$ とすると

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \le |h| \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C|h|$$

が成り立つ．

- よって $q > 1$ のとき $u \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} |(\tau_h u)(x) - u(x)|^q &= |u(x+h) - u(x)|^{q-1} |u(x+h) - u(x)| \\ &\le (2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{q-1} |\tau_h u(x) - u(x)| \\ &\le (2C_1)^{q-1} |\tau_h u(x) - u(x)| \end{aligned}$$

である．ここで $C_1 = \sup\{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}} \mid u \in \mathcal{F}\}$ である．よって $u \in \mathcal{F}$ に対して

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \leq (2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{q-1}\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (2C_1)^{q-1}C|h|$$

つまり $u \in \mathcal{F}$ に対して

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \leq (2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{q-1}\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (2C_1)^{\frac{q-1}{q}}C^{\frac{1}{q}}|h|^{\frac{1}{q}}$$

である．よって $\delta > 0$ を $(2C_1)^{\frac{q-1}{q}}C^{\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$ となるようにとればよい．□