# 4 弱微分

## 4.1 弱微分導入の動機

- 次の微分方程式の境界値問題を考える

$$\begin{cases} -u'' + u = f & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

- 通常，$f$ が $[a,b]$ 上の連続関数であれば，Green 関数を構成することにより，解が一意に存在することがわかる．あるいは $-u''+u=f$ の特殊解 $u_0$ が 1 つ見つかれば $u = u_0 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ の $C_1, C_2$ を境界条件を満たすように選ぶことにより解が得られる．

- では $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界な開集合とするとき

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

  の場合はどうであろうか．$\Omega$ は空間 1 次元の場合の区間（上の $(a,b)$）とは異なり様々な形を取りうる．そのため具体的に解を表示することは一般には難しい．こういった場合も含め，具体的な解の表示を得ることなく，解の存在を示すアイデアを (4.1) を例に取りみてみよう．

- $u \in C^2([a,b])$ を (4.1) の解とし，$\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ を (4.1) の方程式両辺にかけて積分すると

$$\int_a^b (-u'' + u)\varphi dx = \int_a^b f\varphi dx$$

  部分積分により

$$\int_a^b (u'\varphi' + u\varphi)dx = \int_a^b f\varphi dx \quad ({}^\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)) \tag{4.3}$$

  を得る．ここで上の等式には 1 回微分までしか登場していないことに注意する．この等式だけであれば $u$ は 1 回微分可能であるだけで十分である．$u \in C^2([a,b])$ が (4.1) を満たすとき，$u$ を**古典解**あるいは**強解**という．一方，$u \in C^1([a,b])$ が $u(a)=u(b)=0$ と (4.3) を満たすとき $u$ は**弱解**という．

- 与えられた微分方程式において弱解を得る次の方法を**変分法的アプローチ**という：

**Step 1：** 弱解を定義する．実際弱い意味での微分（**弱微分**）を基にした **Sobolev 空間**を導入する．

**Step 2：** Riesz の表現定理やその一般化として Lax-Milgram の定理など関数解析の定理により弱解の存在と一意性を得る．

**Step 3：** 弱解が $C^2$ 級であることを示す（正則性）．

**Step 4：** $C^2$ 級の弱解が古典解であることを示す．

- 実際，Step 4 は次のように示される．もし $u \in C^2([a,b])$ が $u(a) = u(b) = 0$ と (4.3) を満たすとすると，部分積分により

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi dx = 0 \ \ ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b))$$

を満たす．$u \in C^2[a,b]$ であるから $u \in L^2(a,b)$ であるので，系 3.6 より

$$-u'' + u = f \ \ \text{a.e.} x \in (a,b)$$

$u$, $u''$ は連続であるので

$$-u'' + u + f \ \ a < x < b$$

を満たす．これは $u$ が古典解であることを意味する．

## 4.2 弱微分

**定義**

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ とする，ある $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ が存在して

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v\varphi dx \ \ ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b))$$

が成り立つとき，$v$ を $u$ の**弱微分**といい，$u'$ や $\dfrac{du}{dx}$ などと表す．

**注** $v_1$, $v_2$ が共に $u$ の弱微分であるとすると

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v_1\varphi dx \ \ ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)),$$
$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v_2\varphi dx \ \ ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b))$$

であるから

$$\int_a^b (v_1 - v_2)\varphi dx = 0 \ \ ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b))$$

が成り立つ．したがって系 3.6 より $v_1 = v_2$ a.e. $x \in (a,b)$ である．この意味で $u$ の弱微分は一意である．

**例** $I = (-1, 1)$, $u(x) = |x|$ とすると，任意の $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u\varphi' dx = \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0}(-x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= [-x\varphi(x)]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx + [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx - \int_0^1 \varphi(x)dx\end{aligned}$$

である．ここで

$$v(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

とおくと $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(-1, 1)$ で

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' dx = -\int_{-1}^{1} v\varphi dx$$

である．したがって $v = u'$ である．

**補題 4.1**

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a, b)$ が

$$\int_a^b u\varphi' dx = 0 \quad ({}^\forall\varphi \in C_c^\infty(a, b))$$

を満たすとき，ある定数 $C$ があって $u = C$ a.e $x \in (a, b)$ が成り立つ．

**証明**

- $\psi \in C_c^\infty(a, b)$ で $\displaystyle\int_a^b \psi dx = 1$ となるものを任意にとる．
- 任意の $w \in C_c^\infty(a, b)$ に対して，$\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ で

  $$\psi'(x) = w(x) - \left(\int_a^b w(y)dy\right)\psi(x)$$

  となるものがある．実際

  $$h(x) = w(x) - \left(\int_a^b w(y)dy\right)\psi(x)$$

  とおくと，$h \in C_c^\infty(a, b)$ で $\displaystyle\int_a^b h dx = 0$ である．よって $\varphi' = h$ なる $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ が存在する．

- よって仮定から

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b u(x)\left\{w(x) - \left(\int_a^b w(y)dy\right)\psi(x)\right\}dx = 0,\\
&\int_a^b u(x)w(x)dx - \int_a^b u(x)\psi(x)dx \int_a^b w(y)dy = 0,\\
&\int_a^b u(x)w(x)dx - \int_a^b u(y)\psi(y)dy \int_a^b w(x)dy = 0,\\
&\int_a^b \left\{u(x) - \left(\int_a^b u(y)\psi(y)dy\right)\right\}w(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

- $w \in C_c^\infty(a,b)$ は任意より，系 3.6 より $C = \displaystyle\int_a u\psi dy$ として

$$
u(x) = C \quad \text{a.e.} \quad x \in (a,b)
$$

を得る．□

**補題 4.2**

$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ と $y_0 \in (a,b)$ に対して

$$
v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt \quad (x \in (a,b))
$$

とおくと $v \in C(a,b)$ であり，任意の $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ に対して

$$
\int_a^b v\varphi' dt = -\int_a^b g\varphi dt
$$

が成り立つ．

**証明**

- $v$ の連続性は積分の絶対連続性から従う．
- 次に

$$
\begin{aligned}
\int_a^b v\varphi dx &= \int_a^b \left\{\int_{y_0}^x g(t)dt\right\}\varphi'(x)dx\\
&= -\int_a^{y_0}\left\{\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt\right\}dx + \int_{y_0}^b \left\{\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt\right\}dx
\end{aligned}
$$

- Fubini の定理と微積分の基本定理より

$$
\begin{aligned}
\int_a^b v\varphi' dx &= -\int_a^{y_0} g(t)\left\{\int_a^t \varphi'(x)dx\right\}dt + \int_{y_0}^b g(t)\left\{\int_t^b \varphi'(x)dx\right\}dt\\
&= -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt
\end{aligned}
$$

- 以上より示された．□