3　畳み込みと正則化

3.1　畳み込み

定理 3.1(Young の不等式)

$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le \infty)$ とする．このとき a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $y \mapsto f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^N$ で可積分である．したがって，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

が定義される．さらに $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$

$p = \infty$ のとき

$$\begin{aligned} |(f*g)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &\le \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dy = \|g\|_\infty \|f\|_1 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

より　$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ を得る．

$p = 1$ のとき

- Fubini-Tonelli の定理より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx \right) dy \qquad (3.1) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

  より，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy < \infty$$

  つまり $y \mapsto f(x-y)g(y)$ は可積分で $(f*g)(x)$ はa.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で定義される．

- (3.1) より $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ を得る．

$1 < p < \infty$ のとき

- $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ とする．このとき $p = 1$ の場合の結果より，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ は可積分，つまり a.e $x \in \mathbb{R}^N$ に対して
$$|f(x-\cdot)|^{1/p}|g(\cdot)| \in L^p(\mathbb{R}^N)$$
が成り立つ． また，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $|f(\cdot - y)|^{1/p'} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ である．

- Hölder の不等式より
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}|g(y)|dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dy\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &\le \|f\|_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$
より
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy\right)^p \le \|f\|_1^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)$$

- Fubini-Tonelli の定理より
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy\right)^p &\le \|f_1\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right) dx \\ &= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dx\right) dy \\ &= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right) dx \\ &= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \|g\|_p^p \|f\|_1 = \|f\|_1^p \|g\|_p^p < \infty\end{aligned}$$
である．したがって a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して
$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dy < \infty$$
つまり $y \mapsto f(x-y)g(y)$ は可積分で $(f*g)(x)$ は a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で定義される．

- (3.1) より $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$ を得る．

以上で証明が完了する．□

- $f*g$ を f と g の**畳み込み**あるいは**合成積**という．

問

(1) $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ のとき，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$$

は可積分で

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$$

であることを示せ.

(2) $1 \leq p \leq \infty$ とし $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ とするとき，

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)(\check{f} * h)(x)dx$$

を示せ．ただし $\check{f}(x) = f(-x)$ である.

命題 3.2

$f \in C^c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ とする．このとき，すべての $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $y \mapsto f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ で可積分であり，したがって，a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

が定義される．さらに $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$ である.

証明

- $\mathrm{supp} f \subset B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$ とする．各 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| &= \int_{B_R(x)} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{B_R(0} |g(y)|dy \\ &\leq \|f\|_\infty m(B_R(0))^{1/p'} \|g\|_p < \infty\end{aligned}$$

  である.

- 次に連続性を示す．$\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, $x_n \to x$ とする．$f_n(y) = f(x_n - y)$ とすると f は連続であるから

$$f_n(y) \to f(x-y) \quad y \in \mathbb{R}^N$$

  である．また，$|x_n| \leq R'$ となる $R' > 0$ がとれる．$|x_n - y| \geq R$ ならば $f_n(y) = 0$ であるので $|y| \geq |x_n| + R$ ならば $|x_n - y| \geq R$ であるので $|y| \geq R + R'$ ならば $f_n(y) = 0$ である．これより

$$|f_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_{B_{R+R'}(0)} \quad y \in \mathbb{R}^N$$

であり，$\|f\|_\infty \chi_{B_{R+R'}}(0)$ は可積分である．したがって，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(x_n-y)g(y)dy = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

である．□

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$\varphi \in C^\infty(\Omega)$ で台 $\operatorname{supp}\varphi$ が Ω のコンパクト集合（Ω に含まれる有界閉集合）であるものの全体を $C_c^\infty(\Omega)$ と表す：

$$C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト集合}\}$$

  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ は $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ ともかかれる．

- 次に**多重指数 (multi-index)** を定義しよう．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ に対して

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N,$$
$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_N!$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}} \quad \text{つまり} \quad D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$$

注 $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ のノルム $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ と多重指数の $|\alpha|$ は同じ記号であるので注意.

命題 3.2

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ とすると，任意の多重指数 α に対して $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$ が成り立つ.

証明 帰納法により $|\alpha| = 1$ の場合のみ示せばよい.

- $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ とする．

- 任意に $x \in \mathbb{R}^N$ を固定する．任意の $i = 1, \cdots, N$ に対して

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)g(y)dy$$

  を示せばよい.

- e_i を第 i 成分のみ 1 で他が 0 である基本ベクトルとすると，

$$\frac{(f*g)(x+he_i) - (f*g)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} g(y)dy$$

となる．$0 < h < 1$ とすると $|x-y| \geq R+1$ ならば $|x+he_i-y| \geq R$ であるから $f(x+he_i-y)=0$, $f(x-y)=0$ である．したがって

$$\frac{(f*g)(x+he_i)-(f*g)(x)}{h} = \int_{B_{R+1}(x)} \frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} g(y)dy$$

である．

- 平均値の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\left|\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} g(y)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h e_i - y)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |g(y)|$$

が成り立つ．上の式の右辺は h によらないで $B_{R+1}(x)$ 上可積分であるから（$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に注意） $h \to 0$ とすれば結論を得る．□

3.2 軟化子と正則化

定義

次の条件を満たす関数の列 $\{\rho_n\}$ を**軟化子**という：

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)(n\in\mathbb{N}),\ \rho_n(x) \geq 0 \ \ (x\in\mathbb{R}^N),$$
$$\operatorname{supp}\rho_n \subset \left\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x| \leq \frac{1}{n}\right\} \ \ (n\in\mathbb{N}),\ \int_{\mathbb{R}^N}\rho_n(x)dx = 1 \ \ (n\in\mathbb{N})$$

- $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ である．

例

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & (t>0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

とおくと $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ である（証明略）.

この f を用いて $\varphi(x) = f(1-|x|^2)$ とおくと $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり，定数 $C>0$ を用いて

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x|<1, \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

とおくと $\operatorname{supp}\rho = \{x\in\mathbb{R}^N \mid |x| \leq 1\}$ より $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ である．C は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x)dx = \int_{|x|\leq 1}\rho(x)dx = 1$ となるように定める．$\rho_n(x) = n^N\rho(nx)$ と定義する．

命題 3.3

$f \in C(\mathbb{R}^N)$ とすると，$f*\rho_n \to f$ $(n\to\infty)$ (広義一様収束) が成り立つ．

証明

- $K \subset \mathbb{R}^N$ を空でない任意の有界閉集合とし，$K \subset B_R(0)$ なる $R > 0$ をとる．任意に $\varepsilon > 0$ をとると f は $B_{R+1}(0)$ で一様連続なので，ある $\delta \in (0,1)$ があって

$$x \in B_R(0),\ |y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- よって $\frac{1}{n} < \delta$ ならば，任意の $x \in K$ に対して

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \{f(x-y) - f(x)\}\rho_n(y)dy \right| \\ &\leq \int_{B_{1/n}(0)} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\ &\leq \varepsilon \int_{B_{1/n}(0)} \rho_n(y)dy = \varepsilon \end{aligned}$$

これは $\{f * \rho_n\}$ が f に K 上一様収束することを意味する．□

命題 3.4

$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < \infty)$ とすると，$\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

証明

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$L^p(\mathbb{R}^N)$ において $C_c(\mathbb{R}^N)$ は稠密なので $\|f - f_1\|_p < \varepsilon/3$ なる $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ が存在する．

- 次に

$$(\rho_n * f_1)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_1(x-y)\rho_n(y)dy = \int_{B_{1/n}(0)} f(x-y)\rho_n(y)dy$$

である．$\operatorname{supp} f_1 \subset B_R(0)$ とすると $|x-y| \geq R$ ならば $f_1(x-y) = 0$ であるので $|x| \geq R+1$ ならば $|x-y| \geq R$ より $\rho_n * f(x) = 0$ である．したがって $\operatorname{suppp}(\rho_n * f_1) \subset B_{R+1}(0)$ である．

- 命題 3.3 より $\rho_n * f_1$ は $B_{R+1}(0)$ 上 f_1 に一様収束する．したがって

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f_1 - f_1\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |(\rho * f_1)(x) - f_1(x)|^p dx \\ &= \int_{B_{R+1}(0)} |(\rho * f_1)(x) - f_1(x)|^p dx \\ &\leq \sup_{x \in B_{R+1}(0)} |(\rho * f_1)(x) - f_1(x)|^p m(B_{R+1}(0)) \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

である．よってある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ に対して $\|\rho_n * f_1 - f_1\|_p < \varepsilon/3$ が成り立つ．

- よって Young の不等式を用いると $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f) - f\|_p &\leq \|(\rho_n * f - f_1)\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\| + \|f_1 - f\|_p \\ &\leq \|\rho_n\|_1 \|f - f_1\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\| + \|f_1 - f\|_p \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．□

命題 3.5*

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とする．$C_c^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ において稠密である．

証明

- $f \in L^p(\Omega)$ を任意にとり，$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$ とおく．

- $\Omega_n = \{x \in \Omega \mid |x| < n,\ \ \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > 2/n\}$ とおくと $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ である．

- $g_n = \chi_{\Omega_n} \tilde{f}$ とおき

$$f_n(x) = (\rho_n * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) g_n(y) dy = \int_{\Omega_n} \rho_n(x-y) g_n(y) dy$$

とおく．

- $|x-y| \geq 1/n$ ならば $\rho_n(x-y) = 0$ より $\mathrm{dist}(x, K_n) \geq 1/n$, $y \in \overline{\Omega}_n$ ならば $|x-y| \geq \mathrm{dist}(x, \overline{\Omega}_n) \geq 1/n$ であるから

$$\mathrm{supp} f_n \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid \mathrm{dist}(x, \overline{\Omega}_n) \leq 1/n\} = K_n'$$

である．K_n' はコンパクトであり，$K_n' \subset \Omega$ である．したがって $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ である．

- $\|f_n - f\|_p \to 0$ を示す．三角不等式と Young の不等式より

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|(\rho_n * g_n) - (\rho_n * \tilde{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|g_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

である．

- $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ であるから $g_n(x) = \chi_{\Omega_n}(x)\tilde{f}(x) \to \tilde{f}(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で $|g_n(x) - \tilde{f}(x)|^p \leq 2^p |\tilde{f}(x)|^p$ であるから Lebesgue の積分定理より

$$\|g_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - \tilde{f}(x)|^p dx \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

である．次に命題 3.4 より $\|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ (n \to \infty)$ である．以上で示された．□

系 3.6

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合，$1 \leq p < \infty$ とし，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とする．

$$\int_\Omega f\varphi dx = 0 \quad ({}^\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega))$$

が成り立つならば $f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が成り立つ．

証明

- f を Ω の外へ 0 拡張したものを $\tilde{f}$ と表す．
- $\Omega_n = \{x \in \Omega \mid |x| < n,\ \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > 2/n\}$ とおくと $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ であり，$\overline{\Omega}_n$ は Ω のコンパクト集合である．各 n に対して $f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega_n$ を示せばよい．
- $g_n = \tilde{f}\chi_{\Omega_n}$ とし，n を 1 つ固定すると $g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ である．$k \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(\rho_k * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x-y)g_n(y)dy = \int_{\Omega_n} \rho_k(x-y)f(y)dy$$

  である．
- $x \in \Omega_n$ とすると $k > n$ のとき $\rho_k(x - \cdot) \in C_c^\infty(\Omega)$ であるから仮定より

$$0 = \int_\Omega \rho_k(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x-y)g_n(y)dy$$

  である．
- 命題 3.4 より $\|\rho_k * g_n - g_n\|_1 \to 0 \ (k \to \infty)$ であるので $g_n(x) = f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega_n$ である．よって $f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ である．□

3.3 補足：L^p 空間におけるコンパクト性*

- まず次の定理を思い出そう．

定理 3.7(Ascoli-Arzela の定理)

$K \subset \mathbb{R}^N$ を空でない有界閉集合，$\mathcal{C} \subset C(K)$ が

- **(一様有界)**：ある $M > 0$ があって $\sup_{x \in K} |f(x)| \le M$ が全ての $f \in \mathcal{C}$ に対して成り立つ．
- **(同程度一様連続)**：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，次が成り立つ

$$|x - y| < \delta,\ x, y \in K \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad (f \in \mathcal{C})$$

とする．このとき $\mathcal{C}$ は $C(K)$ で相対コンパクトである．

- L^p 空間におけるコンパクト性として次の定理を示す．

定理 3.8(Frechet-Kolmogorov の定理)

$\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ は次を満たすとする：

(i) $\mathcal{F}$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で有界

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|h| < \delta,\ f \in \mathcal{F}\ \Rightarrow\ \|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$$

が成り立つとする．このとき，任意の有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ に対して

$$\mathcal{F}|_\Omega = \{f|_\Omega \mid f \in \mathcal{F}\}$$

は $L^p(\Omega)$ で相対コンパクト，つまり，ある点列 $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$ が存在して $\{f_j|_\Omega\}$ は $L^p(\Omega)$ で収束する部分列をもつ．

$\boxed{\text{証明}}$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界開集合とする．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．(ii) を満たす $\delta > 0$ が存在する．

<u>Step 1:</u> $1/n < \delta,\ f \in \mathcal{F}\ \Rightarrow\ \|\rho_n * f - f\|_p < \varepsilon$ が成り立つ．

- 実際，Hölder の不等式と Fubini の定理より任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $|y| < 1/n <$

δ ならば $\|\tau_{-y}f-f\|_p<\varepsilon$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
\|\rho_n*\tilde{f}-\tilde{f}\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N}|(\rho_n*f)(x)-f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{B_{1/n}(0)}\rho_n(y)\{f(x-y)-f(x)\}dy\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{B_{1/n}(0)}\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\{f(x-y)-f(x)\}dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B_{1/n}(0)}\rho_n(y)|f(x-y)-f(x)|^p dydx \\
&\leq \int_{B_{1/n}(0)}\rho_n(y)\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)-f(x)|^p dxdy \\
&= \int_{B_{1/n}(0)}\rho_n(y)\|\tau_{-y}f-f\|_p^p dy<\varepsilon^p
\end{aligned}$$

が成り立つ.

<u>Step 2:</u> ある $C_n>0$ があって $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|(\rho_n*f)(x)|\leq C_n \quad (f\in\mathcal{F})$ が成り立つ.

- Hölder の不等式と $\mathcal{F}$ が $L^p(\mathbb{R}^N)$ の有界集合であることから

$$|(\rho_n*f)(x)|\leq\int_{B_{1/n}(0)}|\rho_n(y)f(x-y)|dy\leq\|\rho_n\|_{p'}\|f\|_p\leq\|\rho_n\|_{p'}\sup_{g\in\mathcal{F}}\|g\|_p$$

が成り立つ.

<u>Step 3:</u> ある $M_n>0$ があって

$$|(\rho_n*f)(x_1)-(\rho_n*f)(x_1)|\leq M_n\|f\|_p|x_1-x_2| \quad (f\in\mathcal{F},\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

- 実際，命題 3.2 より，任意の $i=1,\cdots,N$ に対して

$$\frac{\partial(\rho_n*f)}{\partial x_i}(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial\rho_n}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy$$

であるので

$$\left|\frac{\partial(\rho_n*f)}{\partial x_i}(x)\right|\leq\left\|\frac{\partial\rho_n}{\partial x_i}\right\|_{p'}\|f\|_p$$

であることから $M_n=\displaystyle\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial\rho_n}{\partial x_i}\right\|$ とおけばよい.

<u>Step 4:</u> 結論を証明する

- Step 1 のように n をとり固定する．
- Step 2, 3 および Ascoli-Arzela の定理より $\mathcal{F}_n := \{(\rho_n * f)|_{\overline{\Omega}}\}_{f \in \mathcal{F}}$ は $C(\overline{\Omega})$ で相対コンパクトしたがって全有界である．したがって，一番最初に指定した $\varepsilon > 0$ に対し，ある $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{F}$ が存在して，

$$g \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \exists j = 1, \cdots, k : \sup_{x \in \Omega} |g(x) - (\rho_n * f_j)(x)| < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)^{1/p'}}$$

  が成り立つ．したがって

$$g \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \exists j = 1, \cdots, k : \|g - (\rho_n * f_j)\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \tag{3.2}$$

- Step 1 より，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\|\rho_n * f - f\|_p < \varepsilon$ が成り立つ．また，$(\rho_n * f)|_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{F}_n$ より (3.2) から，ある $j = 1, \cdots, k$ が存在して

$$\|(\rho_n * f) - (\rho_n * f_j)\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

  が成り立つ．
- 以上より

$$\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - (\rho_n * f)\|_{L^p(\Omega)} + \|(\rho_n * f) - (\rho_n * f_j)\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$$

  を得る．これは $\mathcal{F}|_\Omega$ が相対コンパクトであることを意味する．□