

芝浦工業大学：関数解析II講義ノート

松澤 寛

1 Banach 空間・有界線形作用素・Hilbert 空間の復習

1.1 Banach 空間の定義

- X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. 各 $x \in X$ に対して, 実数 $\|x\|$ が1つ定まり, 次の (N1)~(N3) を満たすとき, $\|\cdot\|$ を X の**ノルム**という:

(N1) $\|x\| \geq 0$ であり $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$ (o はベクトル空間 X の零元)

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ($\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in X$)

- ベクトル空間 X にノルム $\|\cdot\|$ が定義されるとき, $(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という. ノルムが明らかな場合は単に X をノルム空間という.
- ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において $d(x, y) = \|x - y\|$ とすると d は距離の条件をみたすのでノルム空間は距離空間となることに注意する.
- $\{x_n\}$ を X の点列, $x \in X$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ は x に**収束する**. 点列 $\{x_n\}$ が x に収束し, かつ y に収束するならば $x = y$ であることが示されるので, $\{x_n\}$ が x に収束するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ あるいは $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) と表す.
- $\{x_n\}$ が x に収束することの定義は厳密には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立つ.
- X の点列 $\{x_n\}$ が**Cauchy 列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

が成り立つことである. 収束する点列はいつでも Cauchy 列である.

- ノルム空間の任意の Cauchy 列が収束するとき, このノルム空間は**完備**であるといい, 完備なノルム空間を **Banach 空間**という.

1.2 有界線形作用素・有界線形汎関数・共役空間

1.2.1 有界線形作用素

- X, Y をベクトル空間, $D \subset X$ を部分空間とする. $T: D \rightarrow Y$ が線形写像, つまり,

$$\begin{aligned}T(x+y) &= T(x) + T(y) \quad (x, y \in D), \\T(\alpha x) &= \alpha T(x) \quad (\alpha \in \mathbb{K}, x \in D)\end{aligned}$$

が成り立つとき, T を X から Y への**線形作用素**という. $T(x)$ は Tx と書かれる.

- $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間, $T: X \rightarrow Y$ を線形作用素とする. ある $M > 0$ が存在して

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad (x \in X)$$

が成り立つとき T は**有界**である, あるいは X から Y への**有界線形作用素**であるという.

- $T: X \rightarrow Y$ が線形作用素であるとき次の (i)~(iii) は同値である:

- (i) T は有界である.
- (ii) T は連続である, つまり $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ ならば $Tx_n \rightarrow Tx (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ.
- (iii) T は $x = o_X$ で連続である, つまり $x_n \rightarrow o_X (n \rightarrow \infty)$ ならば $Tx_n \rightarrow o_Y (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ, ただし, o_X, o_Y はそれぞれ X, Y の零元である.

- $T: X \rightarrow Y$ を有界線形作用素とすると,

$$\inf\{M \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad (\forall x \in X)\} \quad (1.1)$$

を $\|T\|$ と書き, T の**作用素ノルム**という. 実際

$$\|T\| = \min\{M \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad (\forall x \in X)\}$$

であり

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \quad (x \in X)$$

が成り立つ.

- また,

$$\|T\| = \sup_{x \neq o_X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

が成り立つ.

- $\mathcal{L}(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素全体とする. $X = Y$ のとき $\mathcal{L}(X, Y)$ は $\mathcal{L}(X)$ と表す. $S, T \in \mathcal{L}(X, Y), \alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}(S + T)x &= Sx + Tx \quad (x \in X), \\ (\alpha T)x &= \alpha(Tx) \quad (x \in X)\end{aligned}$$

により, 和 $S + T$, α 倍 αS を定義すると $\mathcal{L}(X, Y)$ はベクトル空間となる. さらに (1.1) をノルムとして $\mathcal{L}(X, Y)$ はノルム空間となる. その意味で有界線形作用素 T のノルムを $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ と表す. さらに Y が Banach 空間であるとき, $\mathcal{L}(X, Y)$ は Banach 空間となる.

1.2.2 有界線形汎関数・共役空間

- X から $\mathbb{K}$ への線形作用素は特に X 上の**線形汎関数**という. $\mathbb{K}$ は絶対値をノルムとして Banach 空間となるので $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ は Banach 空間となる. $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ を X^* を書き, X の**共役空間**という. $f \in X^*$ は X から $\mathbb{K}$ への**有界線形汎関数**という.
- あらためて, f が有界線形汎関数であることの定義を書くと, ある $M > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in X)$$

が成り立つことである. 改めて X^* のノルムは (1.1) つまり

$$\|f\|_{X^*} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in X)\}$$

で定義され,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X \quad (x \in X) \tag{1.2}$$

が成り立つ.

- また

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0_X} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)|$$

が成り立つ. $f \in X^*$ に対して $f(x)$ を $\langle f, x \rangle$ とかく.

- X^* の共役空間 $(X^*)^*$ を X の**第2共役空間**といい X^{**} と表す. 第2共役空間については後に詳しく述べる.

1.3 Hilbert 空間

1.3.1 内積空間・Hilbert 空間

- X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. $x, y \in X$ に対して $(x, y) \in \mathbb{K}$ が 1 つ定まり次の (IP1)~(IP3) を満たすとき $(\cdot, \cdot)$ を **内積** という:

$$(IP1) \quad (x, x) \geq 0 \quad (\forall x \in X) \text{ であり } (x, x) = 0 \iff x = o$$

$$(IP2) \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \quad (\forall x, y \in X)$$

$$(IP3) \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad (\forall x_1, x_2, y \in X)$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C})$$

内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**あるいは **pre-Hilbert 空間**という.

- $(\cdot, \cdot)$ が X の内積であるとき

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad (\forall x, y_1, y_2 \in X)$$

$$(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) \quad (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

- X を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ内積空間とする. このとき,

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ. これを **Schwartz の不等式**という. Schwartz の不等式より $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ とおくと $\|\cdot\|$ は (N1)~(N3) を満たすのでノルムとなることがわかる. したがって内積空間はノルム空間となる. ノルムを用いると Schwartz の不等式は

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in X)$$

となる.

- 内積空間において $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ($\forall x, y \in X$) (**中線定理**) が成り立つ.
- X の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ と $x, y \in X$ に対して $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ が成り立つ.
- 内積空間 X の任意の Cauchy 列が収束するとき X は **Hilbert 空間**であるという. X が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である場合は**実 Hilbert 空間**, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるときは**複素 Hilbert 空間**であるという. Hilbert 空間には X と同様 H も文字として使われる.

1.3.2 直交関係

- X を内積空間とする. $x, y \in X$ が $(x, y) = 0$ を満たすとき, x と y は**直交する**といい $x \perp y$ と表す.
- $A, B \subset X$ ($A, B \neq \emptyset$) が

$$(x, y) = 0 \quad (\forall x \in A, \forall y \in B)$$

を満たすとき $A \perp B$ と表す. $A = \{x\}$ のときは $\{x\} \perp B$ は単に $x \perp B$ と表す.

- $(x, y) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ が成り立つ (**三平方の定理**). 実際

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- $L \subset X$ ($L \neq \emptyset$) に対して

$$L^\perp = \{x \in X \mid (x, y) = 0 \quad (\forall y \in L)\}$$

とおく. このとき $L^\perp$ は X の閉部分空間 (部分ベクトル空間でありかつ閉集合) となる.

1.3.3 射影定理・Riesz の表現定理

補題 1.1

H を Hilbert 空間, $L \subset H$ を閉凸集合であるとする. このとき任意の $x \in H$ に対して

$$\delta = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

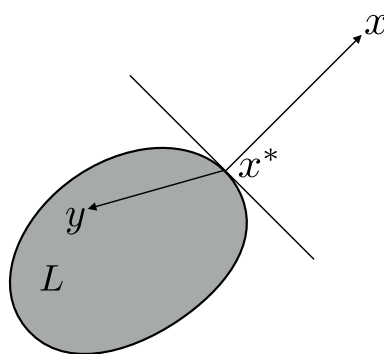
とおくと

$$\delta = \|x - x^*\|$$

を満たす $x^* \in L$ がただ 1 つ存在する. さらに $x^* \in L$ は次の性質をみたす点として特徴付けられる:

$$\operatorname{Re}(x - x^*, y - x^*) \leq 0 \quad (\forall y \in L) \tag{1.3}$$

注 実 Hilbert 空間であれば $(x - x^*, y - x^*) \leq 0$ ($\forall y \in L$) を満たす x^* として特徴付けられる.



定理 1.2 (射影定理)

H を Hilbert 空間, $L \subset H$ を閉部分空間とする. このとき, 任意の $x \in H$ は

$$x = y + z \quad (y \in L, z \in L^\perp)$$

とただ 1 通りに表される.

このとき $x \in H$ に対して上で定まる $y \in L$ を対応させる作用素を L への**正射影**あるいは**直交射影**といい, P_L と表す: $y = P_L x$

定理 1.3 (Riesz の表現定理)

H を Hilbert 空間, f を H 上の有界線形汎関数とすると, ある $y \in H$ がただ 1 つ定まり

$$f(x) = (x, y) \quad (\forall x \in H)$$

が成り立つ. さらに

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|$$

が成り立つ.

- $y \in H$ とすると $f(x) = (x, y)$ ($x \in H$) は $f \in H^*$ を満たす. 逆に任意の $f \in H^*$ に対して Riesz の表現定理により, ある $y \in H$ がただ 1 つ定まり

$$f(x) = (x, y)$$

と表される.

- 以上より $f \in H^*$ に対して Riesz の表現定理により定まる $y \in H$ を x_f を表す. $f \mapsto x_f$ は全単射でさらに次が成り立つ:

$$x_{f+g} = x_f + x_g \quad (f, g \in H^*),$$

$$x_{\alpha f} = \bar{\alpha} x_f \quad (f \in H^*, \alpha \in \mathbb{K})$$

$$\|x_f\|_H = \|f\|_{H^*}$$

である.

- 全単射 $f \mapsto x_f$ により H^* と H は同一視でき, 同一視したもののノルムまで等しい.

2 Lebesgue 空間

2.1 Lebesgue 積分の基本事項

- Lebesgue 積分の基本事項については講義では触れませんので予習 or 復習しておいてください.

2.1.1 測度空間

- X を空でない集合とし, $\mathcal{M}$ を X の部分集合からなる σ -加法族 とする, つまり:

$$(i) \emptyset \in \mathcal{M}$$

$$(ii) A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$$

$$(iii) A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

を満たすものであるとする. 次に $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ を **測度** とする, つまり:

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) A_n \in \mathcal{M} (n = 1, 2, \dots) \text{ で } A_n \cap A_m = \emptyset (m \neq n) \Rightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

を満たすものとする. このとき 3 つの組 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を **測度空間** という.

- $\mathcal{A}$ を X の部分集合族とすると, $\mathcal{A}$ を含む最小の σ -加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と表し, $\mathcal{A}$ により **生成される σ -加法族** という.
- Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の開集合全体 $\mathcal{O}$ により生成される σ -加法族を **Borel 集合族** といい, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ で表す. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に属する集合を **Borel 集合** という. また, 空でない開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ に対して $\{O \cap \Omega \mid O \in \mathcal{O}\}$ により生成される σ -加法族を $\mathcal{B}(\Omega)$ で表す.
- 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ において $N \in \mathcal{M}$ が $\mu(N) = 0$ を満たすとき, N を **零集合** という. X の点 x に関する命題 $P(x)$ がある零集合 N を除いて成立するとき $P(x)$ は **ほとんど至るところ** 成り立つ, $P(x)$ a.e. $x \in X$ などと表す.
- 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が **σ -有限** であるとは, ある可算個の $X_n \in \mathcal{M}$ で $\mu(X_n) < \infty$ かつ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ が成り立つことである.

2.1.2 Lebesgue 測度

- Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度を定義しよう. まず $I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$ の形で表される集合を $\mathbb{R}^N$ の**直方体**とよぶことにする. この直方体 I の体積を $(b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N)$ で定義し $|I|$ で表す.

- 次に $A \subset \mathbb{R}^N$ に対して

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ は直方体} \right\}$$

と定義する. $m^*(A)$ を A の **Lebesgue 外測度**という. $I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$ の Lebesgue 外測度 $m^*(I)$ は $|I|$ に一致する.

- Lebesgue 外測度は次の性質をもつ:

$$(1) \ 0 \leq m^*(A) \leq \infty, m^*(\emptyset) = 0$$

$$(2) \ A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$$

$$(3) \ m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

- $A \subset \mathbb{R}^N$ が **Lebesgue 可測**あるいは **Carathéodory 可測**であるとは

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \quad (\forall E \subset \mathbb{R}^N)$$

が成り立つことである.

- $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R}^N : A \text{ は Lebesgue 可測}\}$ とすると $\mathcal{M}$ は σ -加法族となる. $A \in \mathcal{M}$ に対して $m(A) = m^*(A)$ で定義すると m は測度となる. m を **Lebesgue 測度**という. $\mathbb{R}^N$ の開集合・閉集合, そしてそれらの可算個の和集合や共通部分は全て Lebesgue 可測である.

- $m^*(N) = 0$ なる集合 $E \subset \mathbb{R}^N$ は必ず Lebesgue 可測となる. このことを **Lebesgue 測度の完備性**という.

- $A \subset \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測集合とし, $a \in \mathbb{R}^N$ とすると

$$A + a = \{x + a \in \mathbb{R}^N \mid x \in A\}$$

も Lebesgue 可測であり, $m(A) = m(A + a)$ が成り立つ (**Lebesgue 測度の平行移動不変性**).

- $A \subset \mathbb{R}^n$ を Lebesgue 可測集合とし, T を N 次正則行列とする. このとき

$$TA = \{y \in \mathbb{R}^N \mid y = Tx \ (x \in A)\}$$

は Lebesgue 可測で $m(TA) = |\det T| m(A)$ が成り立つ.

2.1.3 可測関数

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

が成り立つとき f は **μ -可測関数**であるという. f が μ -可測関数であるとき, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}, \{x \in X : f(x) < \alpha\}, \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\}, \\ &\{x \in X : f(x) = \alpha\}, \{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \end{aligned}$$

は全て $\mathcal{M}$ の要素である. 測度 μ が明らかであるとき, μ -可測を単に**可測**という.

- f, g を $\mathbb{R}$ に値をとる可測関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき $f + g, fg, \alpha f$ も可測関数である.
- 可測空間を $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ として $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする. また, $\mathbf{T}$ を N 次正則行列とする. $g(x) = f(\mathbf{T}x)$ とするとき, g も可測である. 実際, $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > a\}, \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(\mathbf{T}x) > a\} \end{aligned}$$

とおくと $A_2 = \mathbf{T}^{-1}A_1$ である. $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ より $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ である.

- $\{f_n\}$ を可測関数列とするとき

$$\begin{aligned} (\sup_n f_n)(x) &:= \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}, \\ (\inf_n f_n)(x) &:= \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

で定義される関数も可測関数である. さらに

$$\begin{aligned} (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x), \\ (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x) \end{aligned}$$

- 各 $x \in X$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在するとき

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

で定義される関数も可測である. また, $\{f_n\}$ が μ -可測関数列であるとき

$$\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ が存在する} \} = \{x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\} \in \mathcal{M}$$

である.

2.1.4 単関数

- $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$ (共通部分なし) で, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$) なる実数に対して

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x) \quad (2.1)$$

の形で表される関数を**単関数**という, ここで $A \subset X$ に対して

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

であり A の**定義関数**という.

- f を非負可測関数とすると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x), \\ f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

なる単関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ が存在する, 実際,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \\ n & f(x) \geq n \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, 2^n n),$$

とおくと $\{\varphi_n(x)\}$ が条件を満たす.

2.1.5 Lebesgue 積分の定義

- $\alpha_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$) のとき (2.1) で表される単関数 $\varphi(x)$ の積分を

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k)$$

で定義する. この積分の値は単関数の表示の仕方によらない, つまり

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}(x)$$

ならば

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)$$

が成り立つ.

- f が非負可測関数とするととき (2.2) を満たす単関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ を用いて

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

で定義する. これは (2.2) を満たす単関数の列の選び方によらず, さらに

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ は単関数で } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) (x \in X) \right\}$$

と一致する.

- f, g が非負可測関数であるとき

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

が成り立つ.

- 非負とは限らない可測関数 f に対して, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ とおく (これらは非負可測関数である).

$$\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$$

の少なくとも一方が有限であるとき

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

と定義する. また

$$\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$$

の両方が有限であるとき f は**可積分**であるという.

- $E \in \mathcal{M}$ とする. 可測関数 f に対して $f\chi_E$ が可積分であるとき f は E 上可積分であるといい

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$$

で定義する.

- f が X 上可積分であるならば

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \mu(\{x \in X \mid f(x) = -\infty\}) = 0$$

が成り立つ, つまり $|f(x)| < \infty$ a.e. $x \in X$ が成り立つ.

- f, g が可積分, $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば $f + g, \alpha f$ も可積分で

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \quad \int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

が成り立つ. ここで f, g は可積分なので $f + g$ は a.e. $x \in X$ に対して定義されることに注意する.

- $X = A \cup B$ ($A, B \in \mathcal{M}, A \cap B = \emptyset$) とする. f が A, B で可積分ならば f は $A \cup B$ で可積分であり

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

が成り立つ.

- $\mu(E) = 0$ ならば任意の可測関数 f に対して $\int_E f d\mu = 0$ が成り立つ.
- 非負可測関数 f が $\int_X f d\mu = 0$ を満たすならば $f(x) = 0$ a.e. $x \in X$ が成り立つ.

2.1.6 収束定理

定理 (単調収束定理)

測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ が

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \quad x \in X$$

を満たすならば $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ.

定理 (Fatou の補題)

測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の非負可測関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

が成り立つ.

定理 (Lebesgue の収束定理)

測度空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ と可測関数 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとする :

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X)$$

(2) $|f_n(x)| \leq F(x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X)$ を満たす可積分関数 $F(x)$ が存在する.

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ. さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

が成り立つ.

注 (1) の代わりに $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$ かつ f が可測関数であれば同じ結果が成り立つ.

定理 (積分記号下の微分)

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を可測空間, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が次を満たすとする :

(i) すべての $y \in (a, b)$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ は可積分

(ii) すべての $x \in \Omega$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ は (a, b) の各点で微分可能で, ある可積分関数 $\Phi(x)$ が存在し

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \Phi(x) \quad (x \in \Omega, y \in (a, b))$$

が成り立つ

とする. このとき

$$F(y) = \int_{\Omega} f(x, y) d\mu$$

は (a, b) の各点で微分可能であり

$$F'(y) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu$$

が成り立つ.

2.1.7 直積測度

- $(X, \mathcal{M}_X), (Y, \mathcal{M}_Y)$ を可測空間とする. このとき直積集合 $X \times Y$ を base とする可測空間を構成したい. $Z = X \times Y$ とおく.
- $C \subset X \times Y$ は $C = A \times B$ ($A \in \mathcal{M}_X, B \in \mathcal{M}_Y$) と表されるとき**可測長方形**ということにする. $X \times Y$ の可測長方形の有限個の共通部分のない和集合で表される集合全体を $\mathcal{R}$ と表すことにする. このとき $\mathcal{R}$ を含む最小の σ -加法族 $\sigma[\mathcal{R}]$ を $\mathcal{M}_Z$ とおくと, $(Z, \mathcal{M}_Z)$ を $(X, \mathcal{M}_X)$ と $(Y, \mathcal{M}_Y)$ の**直積可測空間**という. $\mathcal{M}_Z$ を $\mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y$ と書く. なお $\mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y$ は $\mathcal{M}_X$ と $\mathcal{M}_Y$ の単なる直積ではないことに注意する (定義をもう一度確認せよ).
- Borel 集合族について $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})$ が成り立つ.
- 可測空間を $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ として $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする. このとき $F(x, y) = f(x - y)$ は可測空間 $(\mathbb{R}^{2N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N}))$ において可測である. 実際, $F_1(x, y) = f(x)$ とすると F_1 は可測である. なぜならば, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} \mid F(x, y) > a\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} \mid f(x) > a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > a\} \times \mathbb{R}^N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N}) \end{aligned}$$

- 次に $\mathbf{x} = {}^t(x, y)$, E_N を N 次単位行列として $2N$ 次正方行列を $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} E_N & -E_N \\ E_N & E_N \end{pmatrix}$ とすると $F(x, y) = F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{T}\mathbf{x})$ であるので F も可測である.

定理 (直積測度の一意存在性)

$(X, \mathcal{M}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ を σ -有限な測度空間, $(X \times Y, \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y)$ を直積可測空間とする. このとき $(X \times Y, \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y)$ 上の測度 λ で

$$\lambda(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F) \quad E \in \mathcal{M}_X, \quad F \in \mathcal{M}_Y$$

を満たすものがただ1つ存在する. この λ を $\mu_X \times \mu_Y$ と表し, μ_X と μ_Y の**直積測度**という.

2.1.8 Fubini の定理

定理 (Fubini の定理)

$(X, \mathcal{M}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ σ -有限な測度空間, $(X \times Y, \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y)$ をその直積可測空間, $\mu_X \times \mu_Y$ を μ_X と μ_Y の直積測度とする. $f(x, y)$ が $X \times Y$ 上の $\mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y$ 可測関数で $X \times Y$ で積分可能ならば

(1) a.e. $x \in X$ に対して $f(x, \cdot)$ は μ_Y -可積分, a.e. $y \in Y$ に対して $f(\cdot, y)$ は μ_X -可積分である.

(2) $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu_Y$ は μ_X -可積分, $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu_X$ は μ_Y -可積分である.

(3) 等式

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu_X \times \mu_Y) \\ = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\mu_Y \right\} d\mu_X = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu_X \right\} d\mu_Y \end{aligned} \quad (2.3)$$

が成り立つ.

- 実際に運用に便利なのは次の **Fubini-Tonelli** の定理である.

定理 (Fubini-Tonelli の定理)

$(X, \mathcal{M}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ σ -有限な測度空間とする. $(X \times Y, \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y)$ をその直積可測空間, $\mu_X \times \mu_Y$ を μ_X と μ_Y の直積測度とする. $X \times Y$ 上の $\mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y$ 可測関数 f に対して

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu_X \times \mu_Y), \int_X \left\{ \int_Y |f(x, y)| d\mu_Y \right\} d\mu_X, \int_Y \left\{ \int_X |f(x, y)| d\mu_X \right\} d\mu_Y$$

のいずれかが有限の値として定まれば残りの2つも一致し, 3つの値は一致する. さらに f は $X \times Y$ 上で積分可能となり等式 (2.3) が成り立つ.

2.2 L^p 空間

2.2.1 ノルム空間としての L^p 空間

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする. このとき $1 \leq p < \infty$ に対して

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } \mu\text{-可測で } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

とおく. まずこの $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示そう.

- $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ とすると

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

であるので $|f + g|^p$ も X 上積分可能である, つまり $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ である. 定数倍については明らかである.

- 次にノルムを定めよう. $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ に対して

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4)$$

と定義する. このとき $\|f\|$ がノルムの3つの条件

$$(N1) \quad \|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$(N2) \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して } \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$$

$$(N3) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

を示さなければならない.

- (N1) の前半は明らかである. 次に $\|f\| = 0$ としよう. このとき

$$\int_X |f|^p d\mu = 0$$

であるから $f = 0$ a.e. $x \in X$ が成り立つ. しかし $f = 0$ とは言えない. 実際 $N \subset A, \mu(N) = 0$ なる N の上で $f \neq 0$ であっても $\|f\| = 0$ となるのである. この不都合を回避するために $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ において

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ a.e. } x \in X$$

と定義すると $\sim$ は同値関係になる. この同値類による商集合 $\mathcal{L}(X, \mu) / \sim$ を $L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = L^p(X, \mu)$ と定義する. f の同値類を $[f]$ で表す:

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mu) : f = g \text{ a.e. } x \in X\}$$

として

$$\|[f]\| = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義するのである. 厳密には $L^p(X, \mu)$ の元は同値類であるが, 「ほとんど至るという等しい関数は同じ関数とみなす」というルールで進めていき, $\|[f]\|$ を $\|f\|_p$ と表すことにする. そうすれば $\|f\| = 0$ であれば f は 0 という関数と同一視できるので $f = 0$ とみなすことにより (N1) が成り立つことがわかる.

- 次に (N2) を示す. $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p$$

を得る.

- 次に (N3) であるが, $p = 1$ のときは三角不等式 $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ から明らかである. $p > 1$ についてはいくつかの準備が必要である.

補題 2.1 (Young の不等式)

$p, p' > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ を満たす数とする. このとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (a, b \geq 0)$$

が成り立つ.

命題 2.2 (Hölder の不等式)

$p, p' > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ を満たす数とする. $f \in L^p(X, \mu), g \in L^{p'}(X, \mu)$ とすると

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

が成り立つ.

命題 2.3 (Minkowski の不等式)

p は $1 \leq p < \infty$ を満たす数, $f, g \in L^p(X, \mu)$ とするとき

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ.

これらの証明は補足にて行う.

2.3 Banach 空間としての L^p 空間

定理 2.4

$1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(X, \mu)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとして Banach 空間となる.

証明

- $\{f_n\}$ を $L^p(X, \mu)$ の Cauchy 列とする：任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.5)$$

が成り立つ.

- ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$$

- 次に $n_2 > n_1$ なるある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$$

が成り立つ.

- このように $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ なる自然数の列 $\{n_k\}$ が存在し

$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^k}$$

が成り立つ. 特に $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ が成り立つ.

- $g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ とおく. $|f_{n_1}| \in L^p(X, \mu)$, $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p(X, \mu)$ より $g_k \in L^p(X, \mu)$ であり,

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$$

が成り立つ. また

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \cdots$$

が成り立つので $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$ は各 $x \in X$ に対して存在する.

- 単調収束定理より

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |g_k|^p d\mu, \\ \|g\|_p &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 \end{aligned}$$

を得る. したがって $|g(x)|^p$ つまり $|g(x)|$ は $|g(x)| < \infty$ a.e. $x \in X$ を満たす. さらに $g \in L^p(X, \mu)$ である.

- $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ は a.e. $x \in X$ で存在するので $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ は a.e. $x \in X$ に対して絶対収束することになる. つまり a.e. $x \in X$ に対して $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ が存在する (収束しない場所では $f(x) = 0$ とすればよい). このとき f は μ -可測である. さらに

$$|f_{n_k}(x)| \leq g_k(x) \leq g(x)$$

そして $|f(x)| \leq g(x)$ (a.e. $x \in X$) が成り立つ. よって

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2g(x)$$

が成り立つ.

- Lebesgue の収束定理により

$$\int_X |f(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu = 0 \quad \text{つまり} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$$

が成り立つ. これより $\varepsilon > 0$ にある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \|f - f_{n_k}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ.

- $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるからある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $m, n \geq n_0$ ならば (2.5) が成り立つ. ここで $k \geq k_0$ を $n_k \geq n_0$ となるようにとれば $n \geq n_0$ ならば

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ を意味する. $\square$

- 以上の証明から次のことがわかる.

命題 2.5

$1 \leq p < \infty$ とする. $\{f_n\}$ を $L^p(X, \mu)$ における Cauchy 列とする. このとき, $f \in L^p(X, \mu)$ が存在して

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

が成り立つ. さらに ある $h \in L^p(X, \mu)$ と部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在して

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

$$(3) \quad |f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

が成り立つ.

- $p = 2$ のとき, $f, g \in L^2(X, \mu)$ に対して

$$(f, g) = \int_X fg d\mu \quad (2.6)$$

とおくと, $(\cdot, \cdot)$ は内積の条件 (IP1)–(IP4) を満たす. さらに内積から導かれるノルムは $\|\cdot\|_2$ でありこのノルムに関して完備であるから次のことが従う:

命題 2.6

$L^2(X, \mu)$ は (2.6) を内積として Hilbert 空間となる.

2.4 L^∞ 空間

- $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を X 上の可測関数とする. ある $M \in \mathbb{R}$ があって

$$f(x) \leq M \quad \text{a.e. } x \in X$$

が成り立つとき f は**本質的に上に有界**であるといい

$$\inf\{M : f(x) \leq M \quad \text{a.e. } x \in A\}$$

を f の**本質的上限**といい $\operatorname{ess\,sup}_{x \in A} f(x)$ あるいは $\operatorname{ess\,sup}_A f$ と表す. **本質的に下に有界**, **本質的下限** $\operatorname{ess\,inf}_{x \in A} f(x)$, $\operatorname{ess\,inf}_A f$ も同様に定義される.

- V を

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } \mu\text{-可測で } \operatorname{ess\,sup}_A |f| < \infty\}$$

とおく. $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ において $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ の定義で述べた同値関係 $\sim$ を考え, 商集合 $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)/\sim$ を $L^\infty(X, \mu)$ と表し, $[f] \in L^\infty(X, \mu)$ に対し

$$\|[f]\| = \operatorname{ess\,sup}_X |f| \quad (2.7)$$

で定義する. 以後, $f = g$ a.e. $x \in X$ である関数は同一視するという約束の下, $L^\infty(X, \mu)$ の元を f で表し, $\|[f]\|$ を $\|f\|_\infty$ と表す. 定義から

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{a.e. } x \in X$$

が成り立つ. 実際, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $N_n \subset X$ かつ $\mu(N_n) = 0$ なる $N_n \in \mathcal{M}$ が存在して

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \quad x \in X \cap N_n^c$$

が成り立つ. $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とすると $\mu(N) = 0$ であり

$$x \in X \cap N^c \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ とすればよい.

- $\|f\|_\infty$ がノルムの条件 (N1), (N2), (N3) を満たすことを見よう.
- (N1) は明らか.
- (N2) を示す. $\alpha = 0$ ならば明らかである. $\alpha \neq 0$ とする. このとき

$$|\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \leq |\alpha| \|f\|_\infty \quad \text{a.e. } x \in X$$

である. よって $\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha| \|f\|_\infty$ が成り立つ. 逆に $|f| = \left| \frac{1}{\alpha} \alpha f \right|$ であるから先に示したことから

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|_\infty$$

つまり $|\alpha| \|f\|_\infty \leq \|\alpha f\|_\infty$ を得る.

- (N3) を示す. $f, g \in L^\infty(X, \mu)$ とする. このとき $N_1, N_2 \subset A, \mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ なる $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ が存在して

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad x \in X \cap N_1^c,$$

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty \quad x \in X \cap N_2^c$$

を得る. $N = N_1 \cup N_2$ とすると $\mu(N) = 0$ であり $x \in X \cap N^c$ ならば

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

よって $\|f + g\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ を得る.

定理 2.7

$L^\infty(X, \mu)$ は $|\cdot|_\infty$ をノルムとして Banach 空間となる.

証明

- $\{f_n\}$ を $L^\infty(X, \mu)$ の Cauchy 列とする: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

- $k \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k}$$

が成り立つ. このことから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq n_k$ に対して $\mu(N_{k,m,n}) = 0$ なる $N_{k,m,n} \subset A$ が存在して

$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^k} \quad x \in X \cap N_{k,m,n}^c$$

が成り立つ.

- $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m, n \geq n_k} N_{k, m, n}$ とすれば $\mu(N) = 0$ であり, 任意の $x \in X \cap N^c$, $k \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_k$ に対して

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$

が成り立つ. 任意に $\varepsilon > 0$ をとれば $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ となる k が定まり, そこから n_k が定まり,

$$m, n \geq n_k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in X \cap N^c) \quad (2.8)$$

が成り立つ. これは, 任意の $x \in X \cap N^c$ に対して実数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることを意味する.

- したがって各 $x \in A \cap N^c$ に対して $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が定まる ($x \in N$ に対しては $f(x) = 0$ とする). (2.8) で $m \rightarrow \infty$ とすれば

$$n \geq n_k \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in X \cap N^c) \quad (2.9)$$

が成り立つ. このとき

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x)| \leq \varepsilon + \|f_{n_k}\| \quad (x \in X \cap N^c) \quad \text{つまり a.e. } x \in X$$

である. よって $f \in L^\infty(X, \mu)$ である. また (2.9) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ もわかる. $\square$

- 命題 2.2 の系として次を得る:

命題 2.8(Hölder の不等式)

$1 \leq p, p' \leq \infty$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ を満たすとする. ただし $\frac{1}{\infty} = 0$ とする. $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^{p'}(X, \mu)$ とすると

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

が成り立つ.

2.5 Lebesgue 空間の性質と変分法の基本補題

- ここでは Lebesgue 空間のいくつかの性質について証明なしで述べる.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし, $C(\Omega)$ を Ω で連続な関数とする. $f \in C(\Omega)$ に対して

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

の $\mathbb{R}^N$ における閉包を f の **台** といい, $\text{supp} f$ と表す. さらに

$$\{f \in C(\Omega) \mid \text{supp} f \subset \Omega \text{ で } \text{supp} f \text{ は有界閉集合}\}$$

$C_c(\Omega)$ と表す.

- 以後, m を Lebesgue 測度とし, 測度空間を $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m)$ としたときの L^p 空間を $L^p(\Omega)$ と表し, $f(x)$ の積分について dm を dx と表す.
- 次の2つのことが知られている:

定理 2.9

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合, m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度, $1 \leq p < \infty$ であるとき $C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ において稠密である.

定理 2.10

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合, m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度, $1 \leq p < \infty$ とする. このとき $L^p(\Omega)$ は可分である.

- 定理 2.9 を用いると次のことがわかる.

定理 2.11

$1 \leq p < \infty$ とし, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ とする.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つ.

証明

Step 1: $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ の場合

- $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ とすると $K := \text{supp} f$ は $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合である.

$$K_1 := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, K) \leq 1\}$$

とおくと K_1 も $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合である.

- $|h| \leq 1$ とすると $\text{supp}(f(\cdot + h) - f(\cdot)) \subset K_1$ であり, f は K_1 で一様連続である.

- $\varepsilon > 0$ を任意にとると, f の一様連続性からある $0 < \delta < 1$ があって

$$x \in K, |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon^{1/p}}{(m(K_1) + 1)^{1/p}}$$

が成り立つ. よって $|h| < \delta$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \int_{K_1} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon$$

を得る. Step 1 終了

Step 2: $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ の場合

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると, 定理 2.9 より,

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ が存在する.

- 次に三角不等式と Lebesgue 測度の平行移動不変性により

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - g(\cdot + h)\|_p + \|g(\cdot + h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_p + \|g(\cdot + h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \varepsilon + \|g(\cdot + h) - g(\cdot)\|_p + \|g - f\|_p \end{aligned}$$

Step 1 より $\lim_{h \rightarrow 0} \|g(\cdot + h) - g(\cdot)\|_p = 0$ であるから

$$\limsup_{|h| \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \leq \varepsilon$$

を得る.

- $\varepsilon > 0$ は任意より, Step 2 は終了し, 証明が完了する. $\square$

定理 2.12

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合, m を $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度, $1 \leq p < \infty$ とし, $f \in L^p(\Omega)$ とする.

$$\int_{\Omega} f \varphi dx = 0 \quad (\forall \varphi \in C_c(\Omega))$$

が成り立つならば $f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が成り立つ.

証明**Step 1: $1 < p < \infty$ の場合**

- $f \in L^p(\Omega)$ と $p' = p/(p-1)$ より $|f|^{p-2}f \in L^{p'}(\Omega)$ である. 定理 2.9 より

$$\varphi_n \rightarrow |f|^{p-2}f \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{in } L^{p'}(\Omega) \quad (2.10)$$

となる $\{\varphi_n\} \subset C_c(\Omega)$ が存在する.

- 仮定から

$$\int_{\Omega} f \varphi_n dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ.

- 一方, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \varphi_n dx - \int_{\Omega} |f|^p dx \right| &= \left| \int_{\Omega} f(\varphi_n - |f|^{p-2}f) dx \right| \\ &\leq \|f\|_p \|\varphi_n - |f|^{p-2}f\|_{p'} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.11)$$

を得る.

- 以上 (2.10), (2.11) より

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \varphi_n dx = \int_{\Omega} |f|^p dx$$

つまり $f = 0$ a.e. $x \in \Omega$

Step 2: $p = 1$ の場合

- $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid |x| < n, \quad \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/n\}$$

とおくと, Ω_n は有界開集合で, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ が成り立つ.

- Ω_n は有界開集合なので $f \in L^q(\Omega_n)$ $1 < q < \infty$ である (確かめよ).
- 仮定から任意の $\varphi \in C_c(\Omega_n) (\subset C_c(\Omega))$ に対して

$$\int_{\Omega_n} f \varphi dx = 0$$

が成り立つ.

- 前半より $f = 0$ a.e. $x \in \Omega_n$ である. 以上より $f = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が成り立つ. $\square$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とする. $\bar{\omega} \subset \Omega$ となる任意の有界開集合 ω に対して $f \in L^p(\omega)$ となるような関数全体を $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ と表す. 変分法の基本補題は $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ に対して成り立つ.

2.6 補足

補題 2.1 の証明

- $ab = 0$ のときは明らかなので $ab > 0$ とする.
- まず

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} \quad (x \geq 0) \quad (2.12)$$

が成り立つことを示す. そのためには

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} - x$$

とにおいて増減表を書けばわかる (演習).

- (2.12) において $x = ab^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) とおくと

$$ab^{-\alpha} \leq \frac{a^p b^{-p\alpha}}{p} + \frac{1}{p'}$$

- 上式両辺に $b^{1+\alpha} > 0$ をかけると

$$ab \leq \frac{a^p b^{1+\alpha-p\alpha}}{p} + \frac{b^{1+\alpha}}{p'}$$

- ここで $1 + \alpha = p'$ とおくと $(1/p) + (1/p') = 1$ より $p = (\alpha + 1)/\alpha$ つまり $\alpha + 1 - p\alpha = 0$. したがって

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

が成り立つ. $\square$

命題 2.2 の証明

- $\alpha = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, $\beta = \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$ とおく.
- $\alpha = 0$ ならば $f = 0$ (a.e. $x \in X$) であり $\beta = 0$ ならば $g = 0$ (a.e. $x \in X$) であるから, $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ のときは明らか. よって $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ とする.
- Young の不等式において $a = \frac{|f|}{\alpha}$, $b = \frac{|g|}{\beta}$ とおくと

$$\frac{|fg|}{\alpha\beta} \leq \frac{|f|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g|^{p'}}{p'\beta^{p'}}$$

である. $|f|^p, |g|^{p'}$ は積分可能であるから $|fg|$ も積分可能であり

$$\frac{1}{\alpha\beta} \int_X |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\alpha^p} \left(\int_X |f|^p d\mu \right) + \frac{1}{p'\beta^{p'}} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

よって

$$\int_X |fg| d\mu \leq \alpha\beta = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

が得られる. $\square$

命題 2.3 の証明

- $p = 1$ のときは三角不等式 $|f + g| \leq |f| + |g|$ から明らかであるので $p > 1$ とする. このとき $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ となる $p' > 1$ が存在する. 実際 $p' = \frac{p}{p-1}$ である.

- また $\int_X |f + g|^p d\mu = 0$ のときは明らかなので $\int_X |f + g|^p d\mu > 0$ とする.

- まず

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} \quad (2.13)$$

- ここで $h = |f + g|^{p-1}$ とすると

$$|h|^{p'} = |f + g|^{p'(p-1)} = |f + g|^p$$

であるので $\int_X |h|^{p'} d\mu < \infty$ である. ここで $f, g \in L^p(X, \mu)$ ならば $f + g \in L^p(X, \mu)$ であることを用いた.

- Hölder の不等式より

$$\int_X |f| |h| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |h|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

同様に

$$\int_X |g| |h| d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |h|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

- $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ に注意して (2.13) より

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left\{ \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}}$$

- 両辺を $\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} > 0$ で割ると

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る. $\square$