

1 距離空間の定義と例

1.1 N 次元 Euclid 空間の場合

- N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ は次のように定義される：

$$\mathbb{R}^N := \{(x_1, \dots, x_N) | x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}\}.$$

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ の距離は次のように定義されている：

$$\begin{aligned} d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

- この $d_2(\cdot, \cdot)$ は次の性質をもつ.

命題 1.1

- (1) $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であり, $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ が成り立つ.
- (2) $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$)
- (3) $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$) (三角不等式)

証明

- (1) 前半は明らか. 後半については, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ に対して

$$0 \leq |x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (i = 1, \dots, N)$$

より $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ならば $x_i - y_i = 0$ つまり $x_i = y_i$ ($i = 1, \dots, N$) が成り立つので $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ である. 逆に $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ならば $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ も明らか.

- (2) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ に対して $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ ($i = 1, \dots, N$) が成り立つので $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ が成り立つ.
- (3) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ とおくと

$$\begin{aligned} d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N \{(x_i - z_i) + (z_i - y_i)\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \{(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2\} \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2 \end{aligned}$$

ここで Schwarz の不等式

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を用いると

$$\begin{aligned} d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 &\leq \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2 \\ &= d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 + 2d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})^2 \\ &= (d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}))^2 \end{aligned}$$

以上より $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ が成り立つ. $\square$

1.2 距離空間の定義

- 先ほどの $\mathbb{R}^N$ には距離 $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が定義され, d_2 は命題 1.1 の (1)~(3) を満たすことを確かめた.
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|, \quad d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1, \dots, N} |x_i - y_i|$$

としても d_1, d_∞ は命題 1.1 の (1)~(3) を満たす.

注 $\mathbb{R}^N$ では要素 (点といたりもしていたが) を $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ を用いたが, 以下では集合 X の要素 (点とも呼ぶ) については $x, y, \dots$ など通常のアルフアベットの小文字を用いる.

定義 (距離空間)

- X を空でない集合とする. $x, y \in X$ に対して, 実数 $d(x, y)$ が定義されていて, d が次の (d1)~(d3) を満たすとき, d を X 上の**距離 (metric)** という.

(d1) $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$

(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (**三角不等式**)

- 集合 X と X 上の距離 d の組 (X, d) を**距離空間 (metric space)** という.

例 $(\mathbb{R}^N, d_1), (\mathbb{R}^N, d_2), (\mathbb{R}^N, d_\infty)$ は距離空間である.

例 X を集合とするとき

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

とすると d は X の距離である. この d を**離散距離**といい, (X, d) を**離散距離空間**という.

例 $C([0, 1])$ を閉区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数全体とする. $f, g \in C([0, 1])$ に対して

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

とおくと d は $C([0, 1])$ の距離となる.

証明 $f, g \in C([0, 1])$ に対して $|f(t) - g(t)|$ は $[0, 1]$ で連続であるから最大値をとる (定理 0.21). よって $d(f, g)$ は well-defined である. 次に d が (d1)–(d3) を満たすことを示そう.

(d1) $d(f, g) \geq 0$ は明らか. また

$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq d(f, g) \quad (x \in [0, 1])$$

より

$$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv g(x) \text{ on } [0, 1] \Leftrightarrow [0, 1] \text{ 上の関数として } f = g$$

(d2) $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ より明らか.

(d3) $f, g, h \in C([0, 1])$ とする. このとき

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

がすべての $x \in [0, 1]$ に対して成り立つ. $d(f, h) + d(h, g)$ は t に無関係より

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

つまり $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ が成り立つ. $\square$

例 $C([0, 1])$ を考える. $f, g \in C([0, 1])$ に対して

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とおくと d は $C([0, 1])$ の距離となる.

証明 $f, g \in C([0, 1])$ とすると $|f(x) - g(x)|$ は $[0, 1]$ で連続であるから $[0, 1]$ で積分可能である. したがって $d(f, g)$ は well-defined である. あとは (d1)–(d3) を満たすことを確認すればよい. (d1) の前半, (d2), (d3) は明らかである. (d1) の後半は注意が必要である.

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv g(x) \text{ on } [0, 1]$$

を示す. もしそうでないとする, ある $x_0 \in [0, 1]$ が存在して $|f(x_0) - g(x_0)| \neq 0$ つまり $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ である. $|f(x) - g(x)|$ は連続であるので $x_0 \in (0, 1)$ としてよい. $|f(x_0) - g(x_0)| = \sigma > 0$ とすると $|f(x) - g(x)|$ は連続であるから, ある $\delta > 0$ が存在して $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [0, 1]$ かつ

$$|f(x) - g(x)| > \frac{\sigma}{2} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

が成り立つ. よって

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f(x) - g(x)| dx > \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{\sigma}{2} dx = \sigma \delta > 0$$

これは $d(f, g) = 0$ に反する. $\square$

- (X, d) を距離空間, $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ とする. このとき Y 上に同じ距離を定義することにより (Y, d) は距離空間となる. (Y, d) を (X, d) の **部分空間** という.

2 距離空間の位相・点列の収束・連続写像

2.1 距離空間の位相

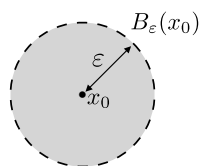
距離空間 (X, d) における開集合・閉集合などの概念は距離 d を用いて定義される。以下 (X, d) を距離空間とする。

定義（開球, ε -近傍）

$x_0 \in X, \varepsilon > 0$ とする。 X の部分集合

$$\{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

を $B_\varepsilon(x_0)$ とかき、**開球**あるいは x_0 の ε -**近傍**という。



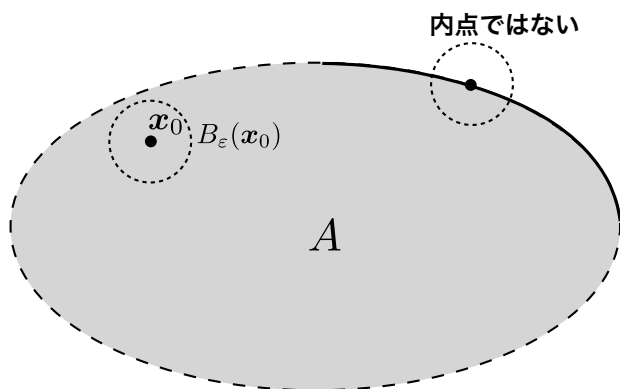
定義（内点・開集合）

$A \subset X$ とする。

(1) $x \in X$ が A の**内点**であるとは、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A$ が成り立つことである。 $x \in B_\varepsilon(x)$ は常に成り立つので A の内点は当然 A の点である。 A の内点の集合を A° とかき、 A の**内部**という。 $A^\circ \subset A$ が成り立つ。

(2) A の点がすべて A の内点であるとき、 A は**開集合**であるという。つまり、

$$\begin{aligned} A \text{ が開集合} &\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A \\ &\Leftrightarrow A \subset A^\circ \text{ したがって } A = A^\circ \end{aligned}$$





開集合のイメージ

注 定義から X 自身は開集合である. また, 空集合 $\emptyset$ は開集合であるとする.

問 1 $x_0 \in X, r > 0$ とするとき $B_r(x_0)$ は開集合であることを示せ.

問 2 1 節で定義した $\mathbb{R}^N$ における距離 d_1, d_2, d_∞ の間に

$$\frac{1}{N}d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{N}d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が成り立つことを示せ.

問 3 問 2 を用いて $A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) について次を示せ.

- (1) A が $(\mathbb{R}^N, d_2)$ において開集合であることと $(\mathbb{R}^N, d_1)$ において開集合であることは同値である.
- (2) A が $(\mathbb{R}^N, d_2)$ において開集合であることと $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ において開集合であることは同値である.

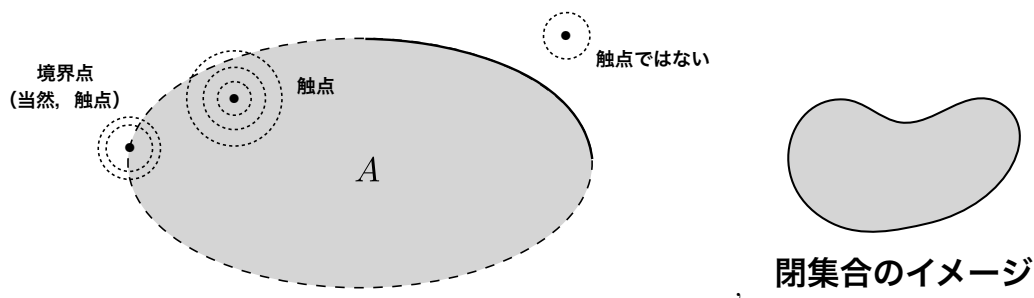
定義 (触点・閉包・境界・閉集合)

$A \subset X$ とする.

- (1) $x \in X$ が A の**触点**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ が成り立つことである. $x \in B_\varepsilon(x)$ は常に成り立つので $x \in A$ であれば $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ がすべての $\varepsilon > 0$ で成り立つ. つまり A の点は A の触点である.
- (2) A の触点全体を $\overline{A}$ とかき, A の**閉包**という.
- (3) $\overline{A} \setminus A^\circ$ を A の**境界**といい, ∂A とかく. 境界の点を**境界点**という. x が境界点であるとは具体的には

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \text{ かつ } A^c \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

- (4) (1) から $A \subset \overline{A}$ が常に成り立つが $\overline{A} \subset A$ したがって $A = \overline{A}$ が成り立つとき A は**閉集合**であるという.



注 定義から X は閉集合である. また, 空集合 $\emptyset$ の閉包 $\overline{\emptyset}$ も $\emptyset$ である. なぜなら $x \in \overline{\emptyset}$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(x) \cap \emptyset \neq \emptyset$ が成り立つはずであるが $B_\varepsilon(x) \cap \emptyset = \emptyset$ であるので, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ である. したがって $\emptyset$ は閉集合である. つまり X と $\emptyset$ は開集合でありかつ閉集合である. (他にそのような X の部分集合はあるか? X と d による. 「連結性」という概念と関連があり幾何学 II の講義で学ぶ)

定義 (有界)

$A \subset X$ とする. ある $x_0 \in X$ と $R > 0$ があって $A \subset B_R(x_0)$ が成り立つとき A は**有界**であるという.

命題 2.1

$A \subset X$ とする. このとき

$$A \text{ が開集合} \iff A^c \text{ が閉集合}$$

証明 ($\Rightarrow$) A が開集合であるとする.

- A^c が閉集合であることを示すためには $\overline{A^c} \subset A^c$ を示せばよい.
- $x \in \overline{A^c}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$ が成り立つ.
- もし $x \in A$ ならば, A は開集合なので, ある $\varepsilon_0 > 0$ があって $B_{\varepsilon_0}(x) \subset A$ が成り立つはずであるが, この $\varepsilon_0 > 0$ に対しては $B_{\varepsilon_0}(x) \cap A^c \neq \emptyset$ が成り立たないので矛盾である. したがって $x \in A^c$ が成り立つ.
- 以上より $\overline{A^c} \subset A^c$ が示され, A^c が閉集合であることが示された.

($\Leftarrow$) A^c が閉集合であるとする.

- A が開集合であることを示すためには $A \subset A^\circ$ を示せばよい.
- $x \in A$ とする. もし $x \notin A^\circ$ であるならば, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $B_\varepsilon(x) \subset A$ とはできない. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$ が成り立つ.
- これは $x \in \overline{A^c} = A^c$ (A^c は閉集合!) であることになり, $x \in A$ に反する. したがって $A \subset A^\circ$ が得られ, A が開集合であることが得られた.

□

$\mathcal{O}$ を距離空間 (X, d) の開集合全体とるとき次が成り立つ.

命題 2.2

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- (2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
- (3) $O_\lambda \in \mathcal{O} (\forall \lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

証明

(1) 注で述べた.

- (2) • $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ なら明らかである.
- $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ とする.
- $x \in O_1 \cap O_2$ を任意にとると $x \in O_1$ で $O_1 \in \mathcal{O}$ より, ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在して $B_{\varepsilon_1}(x) \subset O_1$ が成り立つ. $x \in O_2$ で $O_2 \in \mathcal{O}$ より, ある $\varepsilon_2 > 0$ が存在して $B_{\varepsilon_2}(x) \subset O_2$ が成り立つ.
- $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とすれば

$$B_\varepsilon(x) \subset O_1 \text{ かつ } B_\varepsilon(x) \subset O_2$$

つまり $B_\varepsilon(x) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ. これは $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ を意味する.

- (3) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \neq \emptyset$ とする. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とするとある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x \in O_{\lambda_0}$ である. $O_{\lambda_0} \in \mathcal{O}$ よりある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ である. これは $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ を意味する. $\square$

$\mathcal{F}$ を距離空間 (X, d) の閉集合全体とるとき次が成り立つ.

命題 2.3

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
- (2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$
- (3) $F_\lambda \in \mathcal{F} (\forall \lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

証明

(1) 注で述べた.

- (2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ とすると命題 2.1 より $F_1^c, F_2^c \in \mathcal{O}$ である. 命題 2.4(2) より $F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{O}$ である. de Morgan の法則より

$$F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$$

であるから $(F_1 \cup F_2)^c \in \mathcal{O}$ を得る. 再び命題 2.1 より $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ である.

- (3) $F_\lambda \in \mathcal{F}$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) とすると命題 2.1 $F_\lambda^c \in \mathcal{O}$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) である. 命題 2.2(3) より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c \in \mathcal{O}$ である. de Morgan の法則より

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c$$

であるから $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c \in \mathcal{O}$ を得る. 再び命題 2.1 より $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

□

定義

$A \subset X$ とする. $\bar{A} = X$ が成り立つとき, A は**稠密**であるという.

A が稠密であるとは, X の任意の点が A の触点であることだから, 次のようにいわれる:

$$A \text{ が稠密} \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

例 $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると (X, d) は距離空間である. $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする.

任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 命題 0.6 より $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ である. よって $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ が成り立つ.

定理 2.4 (Weierstrass の多項式近似定理)

$f \in C([a, b])$ つまり f は有界閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある多項式 P_ε が存在して

$$|f(t) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

が成り立つ.

証明は補足で述べる.

- このことは $C([a, b])$ に距離 d を $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$ で定義することにより得られる距離空間 $(C([a, b]), d)$ において多項式全体は稠密であるということを意味する.

2.2 点列の収束

- 距離空間 (X, d) を距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に**収束する**とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

が成り立つことである.

- 厳密には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \quad (x_n \in B_\varepsilon(x))$$

が成り立つことである.

- X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束し, かつ y に収束するならば $x = y$ である. 実際, 三角不等式より

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) = d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{d(x_n, x) + d(x_n, y)\} = 0$ であり, $d(x, y)$ は n に無関係なので $d(x, y) = 0$ つまり $x = y$ である.

- 距離空間 (X, d) において X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (in X), $x_n \rightarrow x$ (as $n \rightarrow \infty$) (in X) などとかく.

命題 2.5

(X, d) を距離空間, $A \subset X$ ($A \neq \emptyset$) とする. このとき次の (1), (2) は同値である.

(1) A は閉集合である.

(2) $\{x_n\}$ を A の任意の点列とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ならば $x \in A$ が成り立つ.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)

- A を閉集合, $\{x_n\}$ を A の点列で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ とする.
- $x \in A^c$ とすると A^c は開集合であるので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A^c$ が成り立つ.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ であるので, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{つまり} \quad x_n \in B_\varepsilon(x)$$

が成り立つが, $x_n \in B_\varepsilon(x) \subset A^c$ ($n \geq n_0$) となり, $\{x_n\}$ が A の点列であることに反する. したがって $x \in A$ である.

(2) $\Rightarrow$ (1)

- A の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ならば $x \in A$ が成り立つとする.
- A が閉集合であることを示すには $\overline{A} \subset A$ を示せばよい.
- $x \in \overline{A}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

が成り立つ.

- $\varepsilon = 1/n$ とすることにより, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

が成り立つので, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ の点を 1 つずつとり, x_n ($n = 1, 2, \dots$) とすると $\{x_n\}$ は A の点列である.

- $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ であるから $d(x_n, x) < 1/n$ が成り立つので $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ である.
- 仮定より $x \in A$ である. 以上より $\overline{A} \subset A$ が成り立つ.

□

この命題の証明と同様に次のことが証明できる.

命題 2.6

(X, d) を距離空間, $A \subset X$ ($A \neq \emptyset$) とする.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ なる } A \text{ の点列 } \{x_n\} \text{ が存在する.}$$

2.3 連続写像

- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.
- f が $x_0 \in X$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つことである.

- $B_r^{(X)}(x_0), B_r^{(Y)}(y_0)$ をそれぞれ $(X, d_X), (Y, d_Y)$ における開球とすると

$$x \in B_\delta^{(X)}(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))$$

であるから

$$f(B_\delta^{(X)}(x_0)) \subset B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))$$

と書き換えることができる.

- 連続性は点列を用いて表現できる.

命題 2.7

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. f が $x_0 \in X$ で連続であるための必要十分条件は x_0 に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (in Y) が成り立つことである.

証明 「 $f: x_0$ で連続」ならば「 $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ 」を示す.

- f を x_0 で連続であるとする, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つ.

- $\{x_n\}$ を x_0 に収束する X の任意の点列とすると, 上の $\delta > 0$ に対し, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta$$

が成り立つ.

- よって $n \geq n_0$ ならば $d_X(x_n, x_0) < \delta$ より $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (in Y) を意味する.

「 $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ 」ならば「 f は x_0 で連続」を示す.

- f が x_0 で連続でないとする, ある $\varepsilon_0 > 0$ は存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$d_X(x, x_0) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

となる $x \in X$ が存在する.

- $\delta = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすることにより, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$d_X(x, x_0) < \frac{1}{n} \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

となる $x \in X$ が存在する. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して上のような x を x_n とする.

- $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) より $\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, x_0) = 0$ である. したがって仮定より $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ であるが, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$ ($n = 1, 2, \dots$) であるのでこれは矛盾である. したがって f は x_0 で連続である. $\square$

命題 2.8

$(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする. f が $x_0 \in X$ で連続, g が $f(x_0) \in Y$ で連続ならば $g \circ f: X \rightarrow Z$ は $x_0 \in X$ で連続である.

証明は演習とする.

- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. f が X の各点で連続であるとき, f は $(X$ で) **連続**あるいは**連続写像**であるという.
- (X, d_X) の開集合全体を $\mathcal{O}_X$, (Y, d_Y) の開集合全体を $\mathcal{O}_Y$ とする. このとき次が成り立つ:

定理 2.9

上の記号の下, $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\text{任意の } O \in \mathcal{O}_Y \text{ に対して } f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$$

証明は補足で述べる.

2.4 補足

2.4.1 写像についてまとめ

- X, Y を集合とする. X の要素 x に対して Y の要素がただ1つ定まるとする. x に対してこの y を対応させるとき, この対応を f で表し X から Y への**写像**といい, $f: X \rightarrow Y$ と表す. また, y を $f(x)$ で表す.

2.4.2 像と逆像

- $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.
- $A \subset X$ とするとき Y の部分集合

$$\{y \in Y \mid y = f(x) \ (x \in A)\} (= \{f(x) \in Y \mid x \in A\})$$

を A の f による**像**といい, $f(A)$ と表す.

- $B \subset Y$ とするとき X の部分集合

$$\{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を B の f による**逆像**といい, $f^{-1}(B)$ と表す.

2.4.3 合成写像

- $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.
- $x \in X$ に対して, 写像 f により Y の要素 y がただ一つ定まり, それを $f(x)$ と書く. この $y = f(x) \in Y$ に対して, 写像 g により Z の要素 z がただ1つ定まる. これは $g(y) = g(f(x))$ と書く.
- このように $x \in X$ に対して Z の要素 $g(f(x))$ を対応させる写像を f と g の**合成写像**といい $g \circ f$ と表す.

2.4.4 全射・単射・全単射

- $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.
- $f(X) = Y$ つまり, 任意の $y \in Y$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在するとき f は**全射**あるいは**上への写像**という.
- $x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ ならばいつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき f は**単射**あるいは**1対1写像**という.
- f が単射かつ全射であるとき f は**全単射**あるいは**1対1対応**という.
- $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき, 任意の $y \in Y$ に対して $y = f(x)$ なる $x \in X$ が存在する (全射だから) が, このような x はただ1つである (単射でもあるから). $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ なるただ1つの x を対応させる写像を f の**逆写像**といい f^{-1} で表す. $f^{-1}: Y \rightarrow X$ である. また

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in Y)$$

はいつでも成り立つ.

2.4.5 定理 2.4 の証明

- 簡単のため $[a, b] = [0, 1]$ の場合に示す. 一般の場合については変数変換で $[0, 1]$ の場合に帰着される.
- まず2項定理より

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad (2.1)$$

次に

$$\sum_{k=0}^n k {}_nC_k x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad (2.2)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= nx \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= nx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{(n-1)-k} = nx
 \end{aligned}$$

• 最後に

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \quad (2.3)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \\
 &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \\
 &= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!((n-2)-k)!} x^k (1-x)^{(n-2)-k} = n(n-1)x^2
 \end{aligned}$$

(2.1), (2.2), (2.3) より

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \quad (2.4)$$

が成り立つ。

• 定理の証明に入ろう。 $f \in C([0, 1])$ に対して

$$B_n[f](x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

とおく。

- (2.1) より

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_k x^k (1-x)^{n-k}$$

である.

- 次に

$$|f(x) - B_n[f](x)| \leq \sum_{k=1}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.5)$$

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる. f は $[0, 1]$ で連続であるから $M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ は有限 (定理 0.21) であり一様連続である (定理 0.23). したがってある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta, \quad x, y \in [0, 1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ.

- (2.5) を次のように分ける

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n[f](x)| &= \sum_{k: |x - k/n| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k: |x - k/n| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

- $|x - k/n| < \delta$ なる k についての和は (2.1) より

$$\sum_{k: |x - k/n| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} C_k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

- $|x - k/n| \geq \delta$ のとき $1 \leq \frac{|x - \frac{k}{n}|^2}{\delta^2}$ であり $|f(x) - f(k/n)| \leq |f(x)| + |f(k/n)| \leq 2M$ と (2.4) より

$$\begin{aligned} \sum_{k: |x - k/n| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}|^2}{\delta^2} 2M C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(nx - k)^2}{n^2 \delta^2} 2M C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2M}{n^2 \delta^2} nx(1-x) \leq \frac{2M}{n \delta^2} \max_{x \in [0, 1]} x(1-x) \\ &\leq \frac{2M}{n \delta^2} \end{aligned}$$

したがって

$$|f(x) - B_n[f](x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \quad (\forall x \in [0, 1])$$

が成り立つ.

- したがって n を十分大きく取れば $B_n[f](x)$ が求める多項式である. $\square$

2.4.6 定理 2.11 の証明

「 f は連続写像」 $\Rightarrow$ 「任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ 」を証明する.

- f は連続とし, $O \in \mathcal{O}_Y$ を任意にとる. $f^{-1}(O) = \emptyset$ なら $\emptyset \in \mathcal{O}_X$ であるので $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ となる. $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ とする.
- $x_0 \in f^{-1}(O)$ を任意にとると $f(x_0) \in O$ である. O は Y の開集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)) \subset O$ が成り立つ.
- f は x_0 で連続であるから, 上の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つ. これを言いかえると

$$x \in B_\delta^{(X)}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)) \subset O$$

であるから

$$x \in B_\delta^{(X)}(x_0) \quad \Rightarrow \quad x \in f^{-1}(O)$$

が成り立つ. これは

$$B_\delta^{(X)}(x_0) \subset f^{-1}(O)$$

を意味するので x_0 は $f^{-1}(O)$ の内点であることに他ならない. $x_0 \in f^{-1}(O)$ は任意であるから $f^{-1}(O)$ は開集合である.

「任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ 」 $\Rightarrow$ 「 f は連続写像」を証明する.

- $x_0 \in X$ を任意にとり, f が x_0 で連続であることを示す. $\varepsilon > 0$ にとると $B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))$ は Y の開集合, つまり, $B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)) \in \mathcal{O}_Y$ であるから仮定より $f^{-1}(B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))) \in \mathcal{O}_X$ である.
- $f(x_0) \in B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))$ であるから ($f(x_0)$ は中心!) $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)))$ であることに注意する.

- $f^{-1}(B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)))$ は X の開集合であるので x_0 はその内点である. よって, ある $\delta > 0$ が存在して

$$B_\delta^{(X)}(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0)))$$

が成り立つ. これは

$$x \in B_\delta^{(X)}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B_\varepsilon^{(Y)}(f(x_0))$$

つまり

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

を意味するので f は x_0 で連続である.

- $x_0 \in X$ は任意だったので f は連続写像である.

□