7　ノルム空間・Banach 空間

7.1　ベクトル空間（復習）

7.1.1　定義と例

K を $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ とするとき，K 上のベクトル空間の定義を思い出そう．

定義（ベクトル空間）

X を空でない集合とする．

- X の 2 つの要素 $x,\, y$ に対して **和** $x+y \in X$
- X の要素 x と K の要素に対して**スカラー倍** $\alpha x \in X$

が定義されており，次の (i)〜(viii) を満たすとする：

(i) $x+y=y+x \quad (x,\, y \in X)$

(ii) $(x+y)+z=x+(y+z) \quad (x,\, y,\, z \in X)$

(iii) ある $o \in X$ が存在して

$$x+o=x \quad (x \in X)$$

(iv) 任意の $x \in X$ に対して

$$x+x'=o$$

となる $x' \in X$ が存在する．

(v) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (x,\, y \in X,\, \alpha \in K)$

(vi) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad (x \in X,\, \alpha,\, \beta \in K)$

(vii) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x) \quad (x \in X,\, \alpha,\, \beta \in K)$

(viii) $1x=x \quad (x \in X)$

このとき X を K 上の**ベクトル空間**という．また，ベクトル空間 X の要素を**ベクトル**ともいう．

注

- (iv) の o は X につきただ 1 つ定まり，**零ベクトル**という．
- (v) の x' は $x \in X$ ごとにただ 1 つ定まり，$-x$ とかかれる．

例

(1) $\mathbb{R}^N$

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_N)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = {}^t(x_1 + y_1, \cdots, x_N + y_N), \quad \alpha\boldsymbol{x} = {}^t(\alpha x_1, \cdots, \alpha x_N)$$

と定義することにより $\mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．

(2) $C([0,1])$（$[0,1]$ 上の実数値連続関数全体）

x, $y \in C([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&(x+y)(t) = x(t) + y(t) \quad (t \in [0,1]),\\ &(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \quad (t \in [0,1])\end{aligned}$$

と定義することにより $x+y$, $\alpha x \in C([0,1])$ であり $C([0,1])$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．このとき o は恒等的に 0 である定数関数である．

7.1.2 線形独立・線形従属

定義（ベクトル空間）

X を K 上のベクトル空間とする．

(1) $x_1, \cdots, x_m \in X$ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K$ を用いて

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

の形に表される X の要素（ベクトル）を $x_1, \cdots, x_m$ の**線形結合**という．

(2) X のベクトル $x_1, \cdots, x_m$ が

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = o \ (\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

を満たすとき $x_1, \cdots, x_m$ は**線形独立**であるという．

(3) $x_1, \cdots, x_m \in X$ が線形独立でない，つまり，ある少なくとも 1 つは 0 でない $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K$ が存在して

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = o$$

が成り立つとき，$x_1, \cdots, x_m$ は**線形従属**であるという．

7.1.3 次元

- X を K 上のベクトル空間とする．
- ある n 個の線形独立な X のベクトルが存在し，かつ，どんな $n+1$ 個のベクトルも線形従属となるとき，X は**有限次元**であるといい，n を X の**次元**という（n は存在すれば X に対して一意的）．このとき $n = \dim X$ と表す．
- 上のような n が存在しない，つまり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して n 個の線形独立な X のベクトルが存在するとき X は**無限次元**であるといい，$\dim X = \infty$ と表す．

例

- $\mathbb{R}^N$ の次元は N である．
- $C([0,1])$ は無限次元である．実際，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して n 個の $C([0,1])$ の要素

$$x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2,\ \cdot,\ x_n(t) = t^n$$

を考え

$$\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_n x_n = o$$

とする．これは

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n = 0 \quad (t \in [0,1])$$

を意味する．t についての恒等式の条件から $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ となる．

7.1.4 部分空間

- X を K 上のベクトル空間，$Y \subset X$ $(Y \neq \emptyset)$ が

  (i) $x, y \in Y \Rightarrow x + y \in Y$

  (ii) $x \in Y, \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in Y$

  を満たすとき Y は X の**部分空間**であるという．
- Y が X の部分空間であるとき，Y 自身が K 上のベクトル空間となっている．

7.2　ノルム空間

7.2.1　ノルム空間の定義と例

定義（ノルム空間）

X を K 上のベクトル空間とする．$x \in X$ に対して，次の 3 つの条件を満たす実数 $\|x\|$ が定義されているとする：

(N1) $\|x\| \geq 0$ $({}^\forall x \in X)$ であり，$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\alpha \in K,\ x \in X)$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x,\ y \in X)$

このとき $\|x\|$ を $x \in X$ の**ノルム**といい，ノルムが定義された空間を**ノルム空間**という．

注 本来はベクトル空間 X とその上で定義されたノルム $\|\cdot\|$ の組 $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間と考えるが，ノルムが明らかな場合は X 自身をノルム空間という．ノルム空間のベクトルをノルム空間の点ということもある．

- X をノルム空間とするとき，$x,\ y \in X$ に対し

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

とする．ただし，$x - y = x + (-y)$ である．このとき d は第 1 節で述べた**距離**の条件

(d1) $d(x, y) \geq 0$ であり，$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$

(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ **（三角不等式）**

を満たす．つまりノルム空間は上で述べた距離により距離空間となる．

- ノルム空間は距離空間であるのでノルム空間における開球

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

を基に $A \subset X$ に対し

  ◦ $x \in X$ が A の内点，触点，境界点であること
  ◦ A の内部，閉包，境界
  ◦ A が開集合であること，閉集合であること

が全く同様に定義されることに注意する．

- ここでノルム空間の例をいくつかあげよう．

$\boxed{\text{例}}$

(1) $\mathbb{R}^N$

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_N)$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}$$

とすると $\|x\|_2$ は $\mathbb{R}^N$ のノルムとなる．また

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|,$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,N} |x_i|$$

もそれぞれ X のノルムである．

(2) $C([0,1])$

$x \in C([0,1])$ に対し

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$$

とすると $\|x\|$ は $C([0,1])$ のノルムとなる．まず，

$$|x(t)| \le \max_{0 \le s \le 1} |x(s)| = \|x\| \quad (t \in [0,1]) \tag{7.1}$$

が成り立つことに注意する．

(N1) (7.1) より

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x(t)| = 0 \ \ ({}^\forall t \in [0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad x = o$$

である．

(N2) $\alpha = 0$ ならば $\alpha x = o$ であるから明らか．$\alpha \neq 0$ とすると

$$|(\alpha x)(t)| = |\alpha(x(t))| = |\alpha||x(t)|$$

であるから

$$|(\alpha x)(t)| \text{ が最大} \Leftrightarrow |x(t)| \text{ が最大}$$

したがって $\|x\| = |x(t_0)|$ となる $t_0 \in [0,1]$ を代入すれば良い．

(N3) (7.1) より $x,\, y \in C([0,1])$ に対して

$$|(x+y)(t)| \le |x(t) + y(t)| \le |x(t)| + |y(t)| \le \|x\| + \|y\| \quad ({}^\forall t \in [0,1])$$

$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ が成り立つ．□

7.2.2 ノルム空間における点列の収束

- ノルム空間 X における点列 $\{x_n\}$ の収束もノルムから定義される距離を用いて定義すればよいが，今一度定義をノルムを使って思い起こしておこう．

- ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

が成り立つことである．厳密には，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

このとき $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ あるいは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ などと書く．x を点列 $\{x_n\}$ の極限というのであった．

- 距離空間の場合（2.2 節）と同様に点列 $\{x_n\}$ が収束すれば極限は一意であることが示される．

- ノルムの条件 (N3)（三角不等式）より

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

が示される．これを用いると次のことがわかる：

命題 7.1

ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立つ．

さらに次が成り立つ：

命題 7.2

X をノルム空間，$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を X の点列，$\{\alpha_n\}$ は K の数列（つまり実数列あるいは複素数列），$x, y \in X$, $\alpha \in K$ とする．このとき

(1) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x_n + y_n \to x + y$ $(n \to \infty)$

(2) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\alpha_n x_n \to \alpha x$ $(n \to \infty)$

が成り立つ．

証明

(1) $(x_n + y_n) - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y)$ に注意して

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって $x_n + y_n \to x + y$ $(n \to \infty)$ は成り立つ.

(2) 次に注意する：

$$\begin{aligned}
&\alpha_n x_n - \alpha x \\
=&(\alpha_n - \alpha)(x_n - x) + (\alpha_n x - \alpha x) + (\alpha x_n - \alpha x) \\
=&(\alpha_n - \alpha)(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x + \alpha(x_n - x)
\end{aligned}$$

したがって $\|x_n - x\| \to 0$, $|\alpha_n - \alpha| \to 0$ $(n \to \infty)$ だから

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \\
\leq&\|(\alpha_n - \alpha)(x_n - x)\| + \|(\alpha_n - \alpha)x\| + \|\alpha(x_n - x)\| \\
=&|\alpha_n - \alpha|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| + |\alpha|\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

したがって $\alpha_n x_n \to \alpha x$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. □

7.3 Banach 空間

- Banach 空間を定義する前に 3.1 節で定義した Cauchy 列の概念をノルムを用いて思い出そう.
- ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

が成り立つことであった.

定義（Banach 空間）

ノルム空間 X の任意の Cauchy 列が X の点に収束するとき，ノルム空間 X は**完備**であるといい，完備なノルム空間を **Banach 空間**という.

注 ノルム $\|\cdot\|$ が定義されたノルム空間が完備であるとはノルムから定義される距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ を備えた距離空間 (X, d) が完備距離空間であることに他ならない.

注

- $\mathbb{R}^N$ は $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ のどのノルムを採用しても Banach 空間となる.
- $C([0, 1])$ において $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ $(x \in C([0, 1]))$ をノルムとして採用すると Banach 空間となる.

8　数列空間と Hölder の不等式・Minkowski の不等式

8.1　数列空間

8.1.1　$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}_0$

- 収束するような実数列全体を c と表す．また，0 に収束するような実数列全体を c_0 と表す．

- $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in c$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},\\ &\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}\end{aligned}$$

  とすれば c はベクトル空間である．ここで 2 つの収束する数列の和，収束する数列の実数倍はいずれも収束する（命題 0.9）ことに注意する．

- 収束する数列は有界（命題 0.8）であるので

$$\|\{a_n\}\| = \sup\{|a_n| : n = 1, 2, \cdots\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

  とすれば $\|\{a_n\}\|$ は c のノルムである．

(N1) 明らか

(N2) $\|\alpha\{a_n\}\| = |\alpha|\|\{a_n\}\|$ を示す．$\alpha = 0$ ならば明らかであるので $\alpha \neq 0$ とする．

$$|\alpha||a_n| = |\alpha a_n| \le \|\{\alpha a_n\}\| = \|\alpha\{a_n\}\|$$

より

$$|a_n| \le \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha\{a_n\}\|$$

であるから

$$\begin{aligned}\|\{a_n\}\| &\le \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha\{a_n\}\|\\ |\alpha|\|\{a_n\}\| &\le \|\alpha\{a_n\}\|\end{aligned}$$

次に $a_n = (1/\alpha)(\alpha a_n)$ つまり $\{a_n\} = (1/\alpha)(\alpha\{a_n\})$ であるから

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\alpha}\right|\|\alpha\{a_n\}\| \le \left\|\frac{1}{\alpha}(\alpha\{a_n\})\right\| = \|\{a_n\}\|\\ &\therefore\quad \|\alpha\{a_n\}\| \le |\alpha|\|\{a_n\}\|\end{aligned}$$

以上より $\|\alpha\{a_n\}\| = |\alpha|\|\{a_n\}\|$ が成り立つ．

(N3) $\|\{a_n\}+\{b_n\}\| \leq \|\{a_n\}\|+\|\{b_n\}\|$ を示す.

$$|a_n+b_n| \leq |a_n|+|b_n| \leq \|\{a_n\}\|+\|\{b_n\}\|$$

であるから

$$\|\{a_n\}+\{b_n\}\| \leq \|\{a_n\}\|+\|\{b_n\}\|$$

を得る.

- c_0 も c と同じノルムでノルム空間となる.

8.1.2 $l^p (1 \leq p < \infty)$, l^∞

- $1 \leq p < \infty$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ となる実数列全体を l^p と表す. $a, b \geq 0$ に対して

  $(a+b)^p \leq 2^p b^p (a \leq b$ のとき), $(a+b)^p \leq 2^p a^p \quad (a \geq b$ のとき) だから
  $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$

  であることに注意すると $|a_n+b_n|^p \leq 2^p(|a_n|^p+|b_n|^p)$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つ. したがって正項級数の比較判定法により

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p < \infty$$

  つまり $\{a_n\}+\{b_n\} \in l^p$ である.

  また, $|\alpha a_n|^p = |\alpha|^p |a_n|^p$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n|^p < \infty$ つまり $\alpha\{a_n\} \in l^p$ である.

- l^p のノルムについては後ほどのべる.
- 有界な実数列全体を l^∞ と表す. l^∞ は c と同じノルムでノルム空間となる.

8.2 Hölder の不等式・Minkowski の不等式

- l^p $(1 \leq p < \infty)$ におけるノルムは

$$\|\{a_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  で定義される. これが三角不等式を満たすことを示すためには準備が必要である.

補題 8.1(Young の不等式)

$p,\ q > 0$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす数とする．このとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0)$$

が成り立つ（$p,\ q > 1$ に注意）．

証明

- $ab = 0$ のときは明らかなので $ab > 0$ とする．
- まず

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \ \ (x \geq 0) \tag{8.1}$$

  が成り立つことを示す．そのためには

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$$

  とおいて増減表を書けばわかる（演習）．
- (8.1) において $x = ab^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$ab^{-\alpha} \leq \frac{a^p b^{-p\alpha}}{p} + \frac{1}{q}$$

- 上式両辺に $b^{1+\alpha} > 0$ をかけると

$$ab \leq \frac{a^p b^{1+\alpha-p\alpha}}{p} + \frac{b^{1+\alpha}}{q}$$

- ここで $1 + \alpha = q$ とおくと $(1/p) + (1/q) = 1$ より $p = (\alpha + 1)/\alpha$ つまり $\alpha + 1 - p\alpha = 0$．したがって

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

  が成り立つ．□

命題 8.2(Hölder の不等式)

$p,\ q>0$ は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす数とする． $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q<\infty$ なる数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ.

証明

- $A=\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p},\ B=\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{1/q}$ とおく.
- $A=0$ ならば $|a_n|=0\ (^{\forall}n)$ であり $B=0$ ならば $|b_n|=0\ (^{\forall}n)$ であるから，$A=0$ または $B=0$ のときは明らか．よって $A\neq0$ かつ $B\neq0$ とする.
- Young の不等式において $a=\dfrac{|a_n|}{A},\ b=\dfrac{|b_n|}{B}$ とおくと

$$\frac{|a_nb_n|}{AB}\leq\frac{|a_n|^p}{pA^p}+\frac{|b_n|^q}{qB^q}$$

である．右辺の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ が収束するから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|<\infty$ であることに注意して

$$\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\leq\frac{1}{pA^p}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p+\frac{1}{qB^q}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\leq AB=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が得られる．□

命題 8.3(Minkowski の不等式)

p は $1 \leq p < \infty$ を満たす数，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p < \infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p < \infty$ を満たすとする．このとき

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ.

証明

- $p=1$ のときは三角不等式 $|a_n+b_n| \leq |a_n|+|b_n|$ から明らかであるので $p>1$ とする．このとき $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ となる $q>1$ が存在する．実際 $q=\dfrac{p}{p-1}$ である.
- また $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p=0$ のときは明らかなので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p>0$ とする.
- まず
$$|a_n+b_n|^p = |a_n+b_n||a_n+b_n|^{p-1} \leq |a_n||a_n+b_n|^{p-1}+|b_n||a_n+b_n|^{p-1} \tag{8.2}$$
- ここで $c_n=|a_n+b_n|^{p-1}$ とすると
$$|c_n|^q = |a_n+b_n|^{q(p-1)} = |a_n+b_n|^p$$
であるので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^q<\infty$ である．ここで $\{a_n\},\{b_n\}\in l^p$ ならば $\{a_n+b_n\}\in l^p$ であることを用いた.
- Hölder の不等式より
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||c_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$
同様に
$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n||c_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$
- $\dfrac{1}{q}=1-\dfrac{1}{p}$ に注意して (8.2) より
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p \leq \left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

- 両辺を $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}>0$ で割ると

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．□

- 以上により l^p $(1 \leq p < \infty)$ において

$$\|\{a_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義すると $\|\{a_n\}\|$ はノルムであることが示された（(N1), (N2) は明らか），つまり，l^p はノルム空間である．

8.3　数列空間の完備性

以後この節では数列を $\boldsymbol{a}=\{a_k\}=\{a_k\}_k$ のように太字のアルファベットで１つの数列を表すことにする．

完備性を示すためには数列空間の点列（数列の列！）を考えることになる．そこで今まで１つの数列を表すのに $\{a_n\}$ と添字に n を用いていたが，k を用いることにする：$\{a_k\}$

また，n は「数列の列」としての項の番号に用いる，つまり第 n 数列という意味で用いる．$\{\boldsymbol{a}_n\}$ を数列の列とするとき，第 n 数列の第 k 項を $a_k^{(n)}$ と表す，つまり $\boldsymbol{a}_n=\{a_k^{(n)}\}$ である．

命題 8.4

c はノルムを

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sup_k |a_k| \quad (\boldsymbol{a}=\{a_k\} \in c)$$

と定義すれば Banach 空間である．

証明

- c の点列（数列の列！）$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が c の Cauchy 列であるとする．$\boldsymbol{a}_n=\{a_k^{(n)}\}_k$ とおく，つまり，数列 $\boldsymbol{a}_n$ は第 k 項が $a_k^{(n)}$ である数列である．

- 任意に $\varepsilon>0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m,n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_n\| = \sup_k |a_k^{(m)}-a_k^{(n)}| < \varepsilon$$

が成り立つ．つまり

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad {}^\forall k \ : \ |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon \tag{8.3}$$

である．

- このことより，各 $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\boldsymbol{a}_n$ の第 k 項を並べてできる数列 $\{a_k^{(n)}\}_n$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である．

- $\mathbb{R}$ の完備性により，各 $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$a_k := \lim_{n \to \infty} a_k^{(n)}$$

が存在する．$\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ とする．

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{a}_1: & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \cdots & a_k^{(1)}, & \cdots, \\
\boldsymbol{a}_2: & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & a_3^{(2)}, & \cdots & a_k^{(2)}, & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\boldsymbol{a}_n: & a_1^{(n)}, & a_2^{(n)}, & a_3^{(n)}, & \cdots & a_k^{(n)}, & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & n \to \infty \\
\boldsymbol{a}: & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & \cdots
\end{array}$$

- $\boldsymbol{a} \in c, \ \lim_{n \to \infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を示せばよい．

- (8.3) で $m \to \infty$ とすれば

$$\begin{aligned}
n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad {}^\forall k \ : \ |a_k^{(n)} - a_k| \leq \varepsilon, \quad \text{つまり,} \\
n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad \sup_k |a_k^{(n)} - a_k| \leq \varepsilon
\end{aligned} \tag{8.4}$$

特に $n = n_0$ で

$$\sup_k |a_k^{(n_0)} - a_k| \leq \varepsilon \tag{8.5}$$

が成り立つ．

- $\boldsymbol{a}_{n_0} = \{a_k^{(n_0)}\}_k \in c$ つまり収束列であるので Cauchy 列である．よって先に決めた $\varepsilon > 0$ に対して，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k, \ l \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |a_k^{(n_0)} - a_l^{(n_0)}| < \varepsilon \tag{8.6}$$

が成り立つ．

- (8.4), (8.6) より，$k, l \geq k_0$ ならば

$$|a_k - a_l| \leq |a_k - a_k^{(n_0)}| + |a_k^{(n_0)} - a_l^{(n_0)}| + |a_l^{(n_0)} - a_l| < 3\varepsilon$$

が成り立つ．これは実数列 $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ が Cauchy 列であることを意味する．したがって，実数の完備性により $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_k$ は収束する，つまり $\boldsymbol{a} \in c$ である．

- (8.4) より（先に任意に決めた $\varepsilon > 0$ に対し，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して）

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| \leq \varepsilon$$

を得る．これは $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を意味する．□

命題 8.5

c_0 はノルムを

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sup_k |a_k| \quad (\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in c_0)$$

と定義すれば Banach 空間である．

証明は難しくはないが補足にまわす.

命題 8.6

l^p はノルムを

$$\|\boldsymbol{a}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in l^p)$$

と定義すれば Banach 空間である．

証明

- l^p の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が l^p の Cauchy 列であるとする．$\boldsymbol{a}_n = \{a_k^{(n)}\}_k$ とおく．

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_n\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{8.7}$$

が成り立つ．

- ここで，任意の k に対し

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

より

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad {}^\forall k \ : \ |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon \tag{8.8}$$

が成り立つ．

- このことより，各 $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\boldsymbol{a}_n$ の第 k 項を並べてできる数列 $\{a_k^{(n)}\}_n$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である．
- $\mathbb{R}$ の完備性により，各 $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$a_k := \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$$

が存在する．$\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ とする．

- $\boldsymbol{a} \in l^p$, $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を示せばよい．
- (8.7) より，m, $n \geq n_0$ ならば任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

であるから $m \to \infty$ として

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |a_k^{(n)} - a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

- $N \geq 1$ は任意であるから $N \to \infty$ として

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)} - a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \tag{8.9}$$

を得る．これより $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{n_0} = \{a_k^{(n_0)} - a_k\}_k \in l^p$ がわかる． l^p はベクトル空間であるから

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{n_0}) + \boldsymbol{a}_{n_0} \in l^p$$

である．

- (8.9) をもう一度見直すと，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| \leq \varepsilon$$

が成り立つことが得られた．これは $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を意味する．□

命題 8.7

l^∞ はノルムを

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sup_k |a_k| \quad (\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in l^\infty)$$

と定義すれば Banach 空間である．

証明は補足で述べる．

8.4　有界閉集合とコンパクト性

- ここで，有界閉集合ではあるが点列コンパクトではない例を示そう．
- l^2 を考える：

$$l^2 = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

- $\boldsymbol{e}_k$ を第 k 項が 1 であり，その他が 0 である数列とすると $\boldsymbol{e}_k \in l^2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ である．
- $\|\boldsymbol{e}_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ であり $\{\boldsymbol{e}_k\}$ は l^2 の有界閉集合 $B = \{\boldsymbol{x} \in l^2 : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ の点列である．
- $\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l$ を考えると $k \neq l$ のとき，これは第 k 項が 1 で第 l 項が -1 である数列である．
- したがって $k \neq l$ ならば

$$\|\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l\| = \sqrt{2}$$

であるので，$\{\boldsymbol{e}_k\}$ のいかなる部分列も収束し得ない．実際，$\{\boldsymbol{e}_{n_k}\}$ が収束するとすると Cauchy 列となるはずだが

$$\|\boldsymbol{e}_{n_k} - \boldsymbol{e}_{n_l}\| = \sqrt{2} \;\; (k \neq l)$$

となるので Cauchy 列にはなり得ない．

8.5　補足：c_0, l^∞ の完備性

8.5.1　c_0 の完備性

- c_0 は c の部分空間であることに注意する．c が完備なので c_0 が c の中で閉集合であることを示せばよい（命題 3.3）．具体的には $\boldsymbol{a}_n$ が c_0 の点列，$\boldsymbol{a} \in c$ で $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{a} \in c_0$ であることを示せばよい．

- $\boldsymbol{a}_n = \{a_k^{(n)}\}$, $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ とする．示すべきことは $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ である．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = \sup_k |a_k^{(n)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ．特に $n = n_0$ として

$$\sup_k |a_k^{(n_0)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.10}$$

  である．

- 次に $\boldsymbol{a}_{n_0} \in c_0$ であるから，$\lim_{k\to\infty} a_k^{(n_0)} = 0$ である．したがって上で定めた ε に対して $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |a_k^{(n_0)}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.11}$$

  が成り立つ．

- よって $k \geq k_0$ ならば (8.10), (8.11) より

$$|a_k| \leq |a_k - a_k^{(n_0)}| + |a_k^{(n_0)}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  が成り立つ．これは $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を意味し，$\boldsymbol{a} \in c_0$ が得られる．

8.5.2 l^∞ の完備性

- ほとんど c の完備性（命題 8.4）の証明と同じである．

- $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を l^∞ の Cauchy 列とし，$\boldsymbol{a}_n = \{a_k^{(n)}\}$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_n\| = \sup_k |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon$$

  つまり

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad {}^\forall k \ : \ |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon \tag{8.12}$$

  が成り立つ．命題 8.4 の証明と同様にして各 k に対して $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ が定まる．

- $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in l^\infty$，$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を示せばよい．

- (8.12) より $m \to \infty$ として

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad {}^{\forall}k \ : \ |a_k^{(n)} - a_k| \leq \varepsilon \tag{8.13}$$

が成り立つ．特に

$$ {}^{\forall}k \ : \ |a_k^{(n_0)} - a_k| \leq \varepsilon \tag{8.14}$$

が成り立つ．

- よって (8.14) より任意の k に対し

$$|a_k| \leq |a_k - a_k^{(n_0)}| + |a_k^{(n_0)}| \leq \varepsilon + \|\boldsymbol{a}_{n_0}\| < \infty$$

よって $\boldsymbol{a} \in l^\infty$ である．

- 最後に (8.13) より

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = \sup_k |a_k^{(n)} - a_k| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ を意味する．□

8.5.3 L^p 空間

- 講義では数列空間 l^p を扱ったが，本来，偏微分方程式論においては L^p 空間の完備性が非常に重要となる．

- Ω を集合，$\mathcal{F}$ を Ω の部分集合からなる σ-加法族，μ を $\mathcal{F}$ で定義された完全加法的測度とする．この 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間という．f を Ω で定義された実数値関数とする．任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in \Omega : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つとき，f を μ-可測関数であるという．$L^p(\Omega)$ を μ-可測関数で

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mu(dx) < \infty$$

を満たす関数全体とする．ここで積分は Lebesgue 積分である．積分についても Hölder の不等式，Minkovski の不等式が成り立つので

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}}$$

とすると $L^p(\Omega)$ はノルム空間である．ただし $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow f = 0$ は成り立たず，f は測度 0 の集合を除いて 0 であるという主張しか成り立たない．そこで $L^p(\Omega)$

において，$f = g$ が測度 0 のある Ω の部分集合を除いて成り立つとき**ほとんど至るところ等しい**といい

$$f = g \quad \text{a.e.}$$

と表す．ここで a.e. は almost everywhere の略である．almost all という意味で a.a. と書くこともある．ほとんど至るところ等しい関数は等しいとみなすことにする．正確には，2 つの関数 f, g がほとんど至るところ等しいとき $f \sim g$ と書くことにより $L^p(\Omega)$ 上の同値関係を与える．そこで $L^p(\Omega)$ をその同値関係における商集合と考えるのである．そうすれば $f = 0$ a.e. の場合，f の同値類の代表元として恒等的に 0 である関数を選べば $\|f\|_{L^p} = 0$ ならば $f = 0$ と言えるのである．

この L^p 空間が Banach 空間であることが極めて重要で，そのために Lebesgue 積分が整備されたと言っても過言ではない．解析学を志される学生さんにはぜひ Lebesgue 積分を学んでいただきたい．