3　距離空間の完備性

3.1　距離空間の完備性

- 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ が $a \in X$ に収束するとは，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ が成り立つこと，厳密には，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \varepsilon$$

  が成り立つことであった．

- 定義に従って $\{x_n\}$ が X の点に収束することを示すには，収束先である a（極限という）を予め知っている必要があるが，現実的には難しい．そこで距離空間が後に述べる完備性という性質をもつと，極限となる a を予め知らなくても点列 $\{x_n\}$ が収束することを示すことができる．まず，そのために必要な Cauchy 列を定義しよう．

定義（Cauchy 列）

(X,d) を距離空間とする．X の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m,\ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

が成り立つことである．

- 以下 (X,d) は距離空間とする．

命題 3.1

Cauchy 列は有界である．つまり $\{x_n\}$ を Cauchy 列とすると，ある $R > 0$ と $x_0 \in X$ が存在して

$$d(x_n, x_0) \leq R \quad n = 1, 2, \cdots$$

が成り立つ．

証明 $\{x_n\}$ を Cauchy 列とすると，$\varepsilon = 1$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n\ \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < 1$$

が成り立つ．特に，$m = n_0$ として

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_{n_0}) < 1$$

が成り立つ．ここで

$$R = \max\{d(x_1, x_{n_0}),\ d(x_2, x_{n_0}),\ d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$$

とすれば $d(x_n, x_{n_0}) \leq R$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．□

命題 3.2

収束列は Cauchy 列である．つまり $\{x_n\}$ がある $a \in X$ に収束するならば $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．

証明

- X の点列 $\{x_n\}$ は a に収束するとする．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ．
- このとき $m, n \geq n_0$ ならば

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- したがって $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．□

- 一般に Cauchy 列は収束列とは限らない．いくつかの例を見てみよう．

例 1 $X = (0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$ とすると (X, d) は距離空間である．$x_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすると $\{x_n\}$ は X の点列であるが，さらに Cauchy 列である．実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して Archimedes の原理（命題 0.4）より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\varepsilon n_0 > 2$$

が成り立つ．よって $m, n \geq n_0$ ならば

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

が成り立つ．しかし，$\{x_n\}$ は $\mathbb{R}$ の数列と見ることができ，$\lim_{n \to \infty} (1/n) = 0 \notin X$ である．よって (X, d) の Cauchy 列は必ずしも X 内の点に収束しない．

例 2 $\mathbb{Q}$ を有理数の集合，$X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$ とすると (X, d) は距離空間である．

次の漸化式で定義される X の点列 $\{x_n\}$ を考える：

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1} \quad n = 1, 2, \cdots$$

- $x_n \in \mathbb{Q}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることは漸化式と数学的帰納法によりわかる．
- 次に，漸化式より $x_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることがわかるので再び漸化式より $x_n \geq 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ がわかる．
- 次にこの数列が Cauchy 列であることを示す．漸化式より

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{x_{n+1} + 1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_n + 1}\right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1} + 1} - \frac{1}{x_n + 1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{(x_{n+1} + 1)(x_n + 1)} \\ |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \frac{|x_{n+1} - x_n|}{(x_{n+1} + 1)(x_n + 1)} \leq \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n| \end{aligned}$$

（ここで $x_{n+1} + 1,\ x_n + 1 \geq 2$ であることを用いた）が成り立つ．

- これより

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|$$

が成り立つ．ここで $x_2 = 1 + 1/(x_1 + 1) = 1 + (1/2)$, $x_2 - x_1 = 1/2$ なので

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

を得る．

- よって $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $m > n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}\right\}}{1 - \frac{1}{4}} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0 - 1} \end{aligned}$$

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0 - 1} < \varepsilon$$

なる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとると $m > n \geq n_0$ ならば

$$|x_m - x_n| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0-1} < \varepsilon$$

が成り立つ．$n \geq m \geq n_0$ であっても成り立つ（$m = n$ のときは明らか．$n > m \geq n_0$ のときは m と n の立場を入れ替えるだけ）．よって $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．

- もし $\{x_n\}$ が α に収束するとすると，漸化式より

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{つまり} \quad \alpha^2 - 2 = 0$$

である．$x_n \geq 0$ より $\alpha = \sqrt{2}$ となるはずであるが，$\alpha \notin \mathbb{Q}$ である（そもそも $\mathbb{Q}$ が全体集合であるので「その外の世界」を知らないという立場をとれば $\alpha^2 - 2 = 0$? そんな数あるか！ということになる）．よって $\{x_n\}$ は (X, d) で収束しない．

- ここで次の定義をしよう．

定義（完備性）

(X, d) を距離空間とする．X の任意の Cauchy 列が X のある点（もちろん Cauchy 列ごとに異なっていい）に収束するとき (X, d) は**完備**であるといい，(X, d) を**完備距離空間** といわれる．

例３ 1 節で学んだ $(\mathbb{R}^N, d_2)$ は完備である（実は 距離として d_1, d_∞ を用いても完備である）．

証明

- $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を $\mathbb{R}^N$ の Cauchy 列とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_n) < \varepsilon$$

が成り立つ．

- $\boldsymbol{x}_n = (x_1^{(n)}, \cdots, x_N^{(n)})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．

- したがって m, $n \geq n_0$ ならば $i = 1, 2, \cdots, N$ に対し

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| = \sqrt{\left(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2} = d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_n) < \varepsilon$$

- よって各 $i = 1, \cdots, N$ に対して $\{x_i^{(n)}\}_n$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である．よって $\mathbb{R}$ の完備性（定理 0.15）より，各 i に対して $\{x_i^{(n)}\}_n$ はある $x_i^\infty \in \mathbb{R}$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} |x_i^{(n)} - x_i^\infty| = 0 \quad (i = 1, \cdots, N)$$

- よって $\boldsymbol{x}_\infty = (x_1^\infty, \cdots, x_N^\infty)$ とすれば

$$d_2(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_\infty) \le \sum_{i=1}^{N} |x_i^{(n)} - x_i^\infty|$$

  であるから $\lim_{n\to\infty} d_2(\boldsymbol{x}_x, \boldsymbol{x}_\infty) = 0.$

□

例 4 $X = C([0,1])$, $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ とすると (X, d) は完備距離空間である（証明は後の節にて）

例 5 $X = C([0,1])$, $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ としたとき，(X, d) は距離空間ではあるが完備ではない（理由も後の節にて）

命題 3.3

(X, d) を完備距離空間，$A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする．このとき (A, d) が完備距離空間であるための必要十分条件は A が閉集合であることである．

証明 「A：閉集合 $\Rightarrow$ (A, d) ：完備」を示す．

- A を閉集合，$\{x_n\}$ を (A, d) の Cauchy 列とする．$\{x_n\}$ は (X, d) の Cauhy 列でもある．
- (X, d) は完備であるから，ある $a \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ が成り立つ．
- A は閉集合，$x_n \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であるから命題 2.7 より $a \in A$ である．(A, d) の任意の Cauchy 列は A の点に収束することが示されたので (A, d) は完備である．

「(A, d) ：完備 $\Rightarrow$ A：閉集合」を示す．

- A が閉集合であることを示すためには次のことを示せばよい：

$$\{x_n\} : A \text{ の点列}, \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow a \in A$$

- $\{x_n\}$ は A の点列で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ とする．このとき $\{x_n\}$ は A の Cauchy 列である（命題 3.2）．(A,d) は完備であるから $\{x_n\}$ はある $a' \in A$ に収束するが，(X,d) において極限は一意であるから $a = a' \in A$ である．□

- 一般に距離空間 (X,d) に対し (X,d) を含む（とみなせる）完備距離空間 $(\tilde{X},\tilde{d})$ で次を満たすものを作ることができる．これを (X,d) の**完備化**という．

定理 3.4

(X,d) を距離空間とする．このとき次の (1)〜(3) を満たす距離空間 $(\tilde{X},\tilde{d})$ が存在する：

(1) $(\tilde{X},\tilde{d})$ は完備距離空間

(2) ある写像 $\iota : X \to \tilde{X}$ が存在して

$$d(x,y) = \tilde{d}(\iota(x),\iota(y)) \quad (x,y \in X)$$

が成り立つ．

(3) $\iota(X)(\subset \tilde{X})$ は $\tilde{X}$ で稠密

証明には集合論で学ぶ同値関係という概念が必要であり，準備には相当の紙数を用意する．後日追加するかもしれないが，ひとまずは証明は略する．

3.2 縮小写像の原理・Cantor の定理

- (X,d) を距離空間，$F : X \to X$ を写像とする．このとき $F(x) = x$ を満たす $x \in X$ を写像 F の**不動点**という．

- ある $0 \le r < 1$ が存在して $F : X \to X$ が

$$d(F(x),F(y)) \le rd(x,y) \quad (x,y \in X)$$

を満たすとき，F は**縮小写像**であるという．縮小写像は明らかに連続写像である．

- 次の定理は極めて重要である．

定理 3.5（縮小写像の原理・Banach の不動点定理）

(X,d) を完備距離空間，$F : X \to X$ を縮小写像とする．このとき F は X にただ 1 つの不動点をもつ．

証明

- F は縮小写像より，ある $r \in [0,1)$ が存在して

$$d(F(x), F(y)) \leq rd(x,y) \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ．

- $x_0 \in X$ を任意にとり，X の点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する：

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1), \quad \cdots, \quad x_{n+1} = F(x_n), \cdots$$

このとき $\{x_n\}$ は (X, d) の Cauchy 列であることを示す．

- $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_n = F(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq rd(x_n, x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

- よって

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq rd(x_n, x_{n-1}) \leq r^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq r^n d(x_1, x_0)$$

- $n_0 \in \mathbb{N}$ を任意にとると $m > n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq r^{m-1} d(x_1, x_0) + r^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + r^n d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0)(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + r^n) \\ &= d(x_1, x_0) \frac{r^n(1 - r^{m-n})}{1 - r} \leq d(x_1, x_0) \frac{r^{n_0}}{1 - r} \end{aligned}$$

が成り立つ．

- したがって $d(x_1, x_0)\frac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとれば $m > n \geq n_0$ ならば

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

が成り立つ（$n \geq m \geq n_0$ でも同様）

- したがって $\{x_n\}$ は (X, d) の Cauchy 列である．(X, d) は完備距離空間であるから，ある $x_\infty \in X$ が存在して $\lim_{n \to \infty} x_n = x_\infty$ in X が成り立つ．

- 漸化式より $x_{n+1} = F(x_n)$ であり F は連続であるから命題 2.9 より

$$x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_\infty)$$

したがって x_∞ は F の不動点である．

- 最後に不動点はただ１つであることを示そう．y_∞ も不動点であるとすると $y_\infty = F(y_\infty)$ である．よって

$$d(x_\infty, y_\infty) = d(F(x_\infty), F(y_\infty)) \leq rd(x_\infty, y_\infty)$$

つまり $(1-r)d(x_\infty, y_\infty) \leq 0$ である．$1-r>0$ であるから $d(x_\infty, y_\infty) \leq 0$ つまり $d(x_\infty, y_\infty) = 0$ を得る．したがって $x_\infty = y_\infty$

□

定理 3.6（縮小写像の原理・Banach の不動点定理）

(X,d) を完備距離空間，$F: X \to X$ を写像とする．ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して F^{n_0} が縮小写像である，つまり，ある $n_0 \in \mathbb{R}^N$ とある $0<r<1$ が存在して

$$d(F^{n_0}x, F^{n_0}y) \leq rd(x,y) \ ({}^\forall x, y \in X)$$

が成り立つとする．このとき F は X にただ１つの不動点をもつ．

証明は演習問題とする．

Banach の不動点定理は微分方程式の局所解の存在を証明するのにも用いられる．補足で述べよう．

- 最後に Cantor の定理を述べる．その前に次の定義をしよう．(X,d) を距離空間とし $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする．このとき

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y) | x, y \in A\}$$

とおき，A の**直径**という．次のことがわかる：

$$A\text{: 有界} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{diam}(A) < \infty$$

定理 3.7（Cantor の定理）

(X,d) を完備距離空間とする．$\{F_n\}$ を (X,d) の空でない閉集合の単調減少列とする，つまり，

$$\begin{aligned} &F_n\text{: 閉集合},\ F_n \neq \emptyset \ \ (n = 1, 2, \cdots), \\ &F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots \end{aligned}$$

が成り立つとする．さらに $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ はただ１つの要素からなる集合である，つまり，ある $a \in X$ がただ１つ存在して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$

- まず $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は2つ以上の要素を含まないことを示そう．$a, b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ とすると

$$a, b \in F_n \quad n = 1, 2, \cdots$$

であるから

$$0 \leq d(a,b) \leq \operatorname{diam}(F_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．この不等式で $n \to \infty$ とすると

$$d(a,b) \leq 0 \quad \text{つまり} \quad d(a,b) = 0 \quad \text{よって} \quad a = b$$

である．

- 次の $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ を示そう．

- 各 $n = 1, 2, \cdots$ に対し $F_n \neq \emptyset$ であるので，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対し F_n の要素を１つずつとり，x_n とする：

$$x_n \in F_n \quad n = 1, 2, \cdots$$

- ここで $m \geq n \Rightarrow F_m \subset F_n$ より

$$x_m \in F_n \quad (m \geq n)$$

が成り立つことに注意する．

- $\{x_n\}$ は (X, d) の Cauchy 列であることを示そう．

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$$

が成り立つ．

- よって $m, n \geq n_0$ ならば $x_m, x_n \in F_{n_0}$ より

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\{x_n\}$ が (X, d) の Cauchy 列であることを意味する．

- (X, d) は完備距離空間であるので，ある $x_\infty \in X$ が存在して $\lim_{n \to \infty} x_n = x_\infty$ である．

- 最後に $x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ を示そう．そのためには
$$x_\infty \in F_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$
を示せばよい．$n \in \mathbb{N}$ を任意にとる．

- $m \geq n \Rightarrow x_m \in F_n$ であり，F_n は閉集合であるから命題 2.6 より
$$x_\infty = \lim_{m\to\infty} x_m \in F_n$$
n は任意より $x_\infty \in F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．つまり
$$x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

□

- 完備距離空間における次の定理も重要である．

定理 3.8（Baire の Category 定理）

(X, d) を完備距離空間とする．X が可算個の閉集合 F_n により $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ と表されるならば，少なくとも 1 つの F_n は内点をもつ．

証明は補足で行う．

3.3 補足

3.3.1 Baire の Category 定理の証明

証明

- 結論を否定し,「いかなる F_n も内点を含まない」と仮定する．
- 仮定より F_1 は内点を含まないので $F_1 \neq X$ である．
- F_1^c は開集合で $F_1^c \neq \emptyset$ より，ある $x_1 \in X$ とある $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ が存在して $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset F_1^c$
- 仮定より F_2 は内点を含まないので $B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \not\subset F_2$ である．よって開集合 $F_2^c \cap B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ は空でないため，ある $x_2 \in X$ とある $\varepsilon_2 \in (0, 1/2^2)$ があって $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cap F_2^c$ が成り立つ．

- 以下順に，$0 < \varepsilon_n < 1/2^n$, $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を
$$B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\varepsilon_n/2}(x_n), \quad B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$$
となるようにとることができる．

- $\{x_n\}$ はCauchy列であることを示そう．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，$n_0 \in \mathbb{N}$ を $(1/2^{n_0}) < \varepsilon$ となるようにとる．このとき $m > n \geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \end{aligned}$$
である．したがって $\{x_n\}$ はCauchy列である．したがってある x_∞ に収束する．

- ところで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $m > n$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_n, x_\infty) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_\infty) \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{2} + d(x_m, x_\infty) \to \frac{\varepsilon_n}{2} \quad (m \to \infty) \end{aligned}$$

- したがって $d(x_n, x_\infty) < \varepsilon_n$ つまり $x_\infty \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ である．一方，$B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ より $x_\infty \notin F_n$ である．

- n は任意より $x_\infty \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となるがこれは $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ に矛盾する．□

3.3.2 常微分方程式の局所解の一意存在

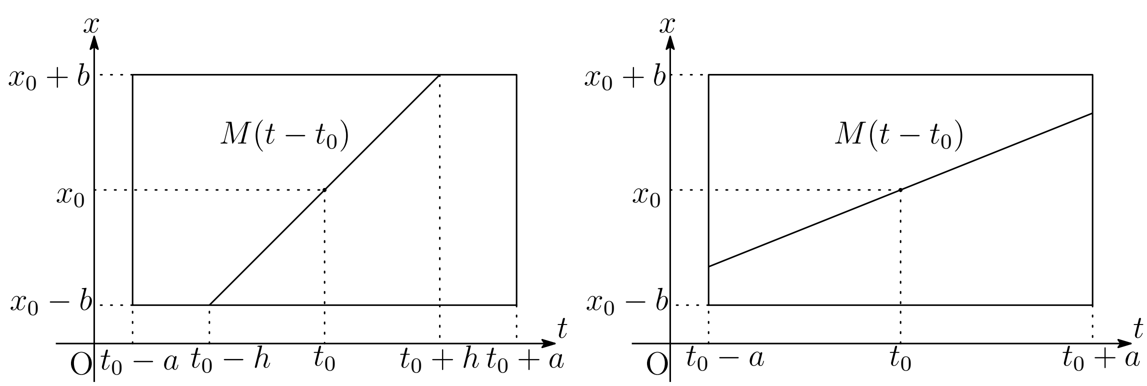
- Banachの不動点定理を用いて微分方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$
の局所解の存在と一意性をしめそう．

定理 3.9

a, $b > 0$ とし f は
$$K = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, \ |x - x_0| \leq b\}$$
で連続とする．さらに，ある定数 $L > 0$ が存在して
$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad ({}^\forall(t, x_1), (t, x_2) \in K)$$
が成り立つとする．このときある $h > 0$ が存在して，(3.1) は $[t_0 - h, t_0 + h]$ においてただ１つの解をもつ．

証明

- f は有界閉集合 K で連続であるので $M = \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)|$ とおく．
- $h > 0$ を $h < \{a, 1/L, b/M\}$ を満たすようにとる．このとき $[t_0 - h, t_0 + h] \in [t_0 - a, t_0 + a]$ に注意する．
- 次に $x \in C^1([t_0 - h, t_0 + h])$ が (3.1) を満たすことは $x \in C([t_0 - h, t_0 + h])$ が積分方程式
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{3.2}$$
を満たすことが同値であることに注意する．
- また，$x \in C^1([t_0 - h, t_0 + h])$ が (3.1) を満たすならば，$|x(t) - x_0| \le b$ つまり $(t, x(t)) \in K$ (t) であることを示す．実際，ある $\tau_0 \in (t_0 - h, t_0 + h)$ で $x(\tau_0) = x_0 + b$ とすると
$$b = |x(\tau_0) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{\tau_0} f(s, x(s))ds \right| \le M|\tau_0 - t_0| < Mh \le b$$
となり矛盾である．$x(\tau_0) = x_0 - b$ としても同様である．



$h < a$, $h < b/M$ の意味

- $x, y \in C([t_0 - h, t_0 + h])$ に対して $d(x, y) = \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} |x(t) - y(t)|$ とすると $(C([t_0 - h, t_0 + h]), d)$ は完備距離空間である．
- $X = \{x \in C([t_0 - h, t_0 + h) : |x(t) - x_0| \le Mh(^\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h])\}$ とおくと (X, d) は $(C([t_0 - h, t_0 + h]), d)$ の部分空間であり，完備距離空間となる．実際，$|x(t) - x_0| \le Mh$ $(^\forall t \in [x_0 - h, x_0 + h])$ は $d(x, x_0) \le Mh$ とかけるので X は d について $C([t_0 - h, t_0 + h])$ の閉集合であるため，命題 3.3 より (X, d) は完備となる．

- $x \in X$ に対して

$$(Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

と定義すると $Fx \in C([t_0 - h, t_0 + h])$ は明らかである（微分積分学の基本定理！）．

- $F : X \to X$ を示そう．そのためには $Fx \in X$ つまり $|(Fx)(t) - x_0| \leq Mh$ ($^\forall t \in [x_0 - h, x_0 + h]$) を示せばよい．

- 実際

$$|(Fx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh$$

である．

- F が縮小写像であることを示す．実際 $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\begin{aligned} &|(Fx_1)(t) - (Fx_2)(t)| \\ \leq &\left| \int_{t_0}^{t} \{f(s, x_1(s)) - f(x, x_2(s))\}ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds \right| \\ \leq &\max_{s \in [t_0 - h, t_0 + h]} |x_1(s) - x_2(s)|L|t - t_0| = Lhd(x_1, x_2) \quad ^\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \end{aligned}$$

である．これより $d(Fx_1, Fx_2) \leq Lhd(x_1, x_2)$ である．$0 < Lh < 1$ であるから F は X にただ１つの不動点をもつ．

- この不動点は (3.2) を満たす．□