複素関数論Ｉ　講義資料

神奈川大学理学部　松澤　寛

Contents

1 複素数の定義・複素数平面・極形式 **1**
1.1 複素数の定義 1
1.2 実部・虚部・共役複素数 3
1.3 複素数平面 4
1.4 絶対値と偏角 5
1.4.1 絶対値 5
1.4.2 偏角 7
1.5 極形式 7
1.5.1 極形式と積・商 8

2 複素数平面の位相・数列の収束・級数 **10**
2.1 近傍・開集合・閉集合 10
2.2 有界集合・コンパクト集合 13
2.3 連結性・領域 14
2.4 数列の収束 14
2.5 級数 15
2.6 補足 17
2.6.1 極限の一意性・収束する数列の有界性 17
2.6.2 命題 2.5 の証明 18
2.6.3 定理 2.3 と定理 2.6 の証明の準備 19
2.6.4 定理 2.6 の証明 22
2.6.5 定理 2.3 の証明 23

3 複素関数とその極限・連続性 **27**
3.1 複素関数 27
3.2 複素関数の極限 29
3.3 関数の連続性 30
3.4 補足 33
3.4.1 命題 3.1 の証明 33
3.4.2 定理 3.6 の証明 35

4 複素関数の微分可能性 **37**
4.1 複素関数の微分可能性 37
4.2 Cauchy-Riemann の関係式 39
4.3 補足：定理 4.5 の証明 42
4.3.1 ２変数関数の全微分可能性 42
4.3.2 定理 4.5 の証明 42

5 正則関数 **45**
5.1 正則関数 45
5.2 正則関数の性質 46
5.3 調和関数 49

6 初等関数 **53**
6.1 多項式・有理関数 . . . 53
6.2 指数関数 . . . 53
6.3 三角関数 . . . 56
6.4 対数関数 . . . 57
6.5 累乗根・複素累乗 . . . 61
6.6 補足 . . . 64

7 複素積分 **66**
7.1 複素数平面上の曲線 . . . 66
7.2 実数変数の複素数値関数についてのまとめ . . . 69
7.3 複素積分の定義 . . . 70
7.4 複素積分の性質 . . . 73

8 Cauchy の積分定理 **77**
8.1 原始関数 . . . 77
8.2 Cauchy の積分定理 . . . 78
8.3 Cauchy の積分定理の証明 . . . 81
8.4 補足：Green の定理の略証 . . . 83

9 Cauchy の積分公式 **85**
9.1 Cauchy の積分公式 (1) . . . 85
9.2 Cauchy の積分公式 (2) . . . 87

10 Cauchy の評価式・Liouville の定理とその応用 **96**
10.1 Cauchy の評価式 . . . 96
10.2 Liouville の定理とその応用 . . . 97

11 一次分数関数と円々対応 **100**
11.1 一次分数関数 . . . 100
11.2 円々対応の証明 . . . 101
11.3 Riemann 球面 . . . 104

12 等角写像 **107**
12.1 平面上の曲線とその接ベクトル . . . 107
12.2 正則関数の等角性 . . . 108

1　複素数の定義・複素数平面・極形式

1.1　複素数の定義

複素数とは $\boldsymbol{i^2 = -1}$ となる数を導入して

$$a + bi \quad (a,\ b\ :\ \text{実数})$$

と表される数と習ったと思う．しかし，今まで実数しか知らなかった人にとって，$i^2 = -1$ となる "数 (?)" をある意味 "勝手に" 導入してよいのか，導入したとしてもその $a + bi$ の $+$ とは一体何か？といった疑問が残り，釈然としない．そこで本講義では Hamilton による定義により複素数を導入する．

- $\mathbb{R}^2$ は２次の行ベクトル（あるいは実数の順序対）(a, b) の全体であった：

  $$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

  $\mathbb{R}^2$ は和と実数倍が定義されているベクトル空間である．差は和から定義される．

  和： $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

  差： $(c, d) + (x, y) = (a, b)$ を満たす (x, y) のことであり，$(a, b) - (c, d)$ とかく．実際

  $$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

  である．

- これに加え，積と商を次のように定義する：

  積： $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

  商： $(c, d) \neq (0, 0)$ のとき

  $$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\right)$$

  注 商については $(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$ となる (x, y) と定義してもよい．

- $(a, 0)$ は実数 a と同一視する．

- 積の定義から

  $$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

  となる．$i = (0, 1)$ とすれば同一視を介して $i^2 = -1$ が成り立つ．i を**虚数単位**という．

- 以上より

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+b(0,1)=a+bi$$

であり，$a+bi$ は $(a,0)$ と $b(0,1)$ との和として意味をもつ．

- このように四則演算が定義された $\mathbb{R}^2$ のベクトルを $a+bi$ と表し，この集合を $\mathbb{C}$ で表す：

$$\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$$

また，$\mathbb{C}$ の各要素を**複素数**という．$a+bi$ は $a+ib$ と書くこともある．

- $\mathbb{C}$ における相等と四則演算についてまとめておこう．

$\mathbb{C}$ における相等 ２つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ が**等しい**とは

$$a=c \text{ かつ } b=d$$

が成り立つことである．

$\mathbb{C}$ における四則演算

和： $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

差： $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

積： $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

商： $c+di\neq 0+0i$ のとき

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

注 $a+bi$ において $b=0$ のとき，対応する $\mathbb{R}^2$ のベクトルは $(a,0)$ であるから $a+0i$ は a と表す．同様に $a=0$ のときは $(0,b)=b(0,1)=bi$ より $0+bi$ は bi と表す．

命題 1.1

$\mathbb{C}$ は上で述べた演算で体をなす．つまり，$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$　**（和の交換法則）**

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$　**（和の結合法則）**

(3) $\alpha + 0 = \alpha$　**（和に関する単位元の存在）**

(4) $\alpha + (-\alpha) = 0$　**（和に関する逆元の存在）**
ただし $\alpha = a + bi$ に対して $-\alpha = (-a) + (-b)i$ である．

(5) $\alpha\beta = \beta\alpha$　**（積の交換法則）**

(6) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$　**（積の結合法則）**

(7) $\alpha 1 = \alpha$　**（積に関する単位元の存在）**

(8) $\alpha \neq 0$ のとき $\alpha \dfrac{1}{\alpha} = 1$　**（積に関する逆元の存在）**

(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$　**（分配法則）**

証明は省略する．

1.2　実部・虚部・共役複素数

- 複素数 $z = a + bi$ （a, b：実数）に対し，a を z の**実部**といい，$\mathbf{Re}\boldsymbol{z}$ と表す．また，b を z の**虚部**といい，$\mathbf{Im}\boldsymbol{z}$ と表す．

- $z = a + bi$ に対し，$a + (-bi)$（$a - bi$ とかくことにする）を z の**共役複素数**といい，$\overline{\boldsymbol{z}}$ で表す．

注 $z = a + bi$ の虚部は b であり bi ではない．

命題 1.2

$z,\ w \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}z + \mathrm{Re}w,\ \mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}z + \mathrm{Im}w$

(2) $\overline{(\overline{z})} = z$

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(5) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (w \neq 0)$

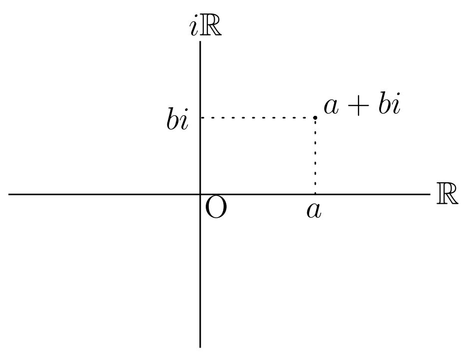
(6) $\mathrm{Re}z = \dfrac{z+\overline{z}}{2},\ \ \mathrm{Im}z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

証明は省略する．

1.3　複素数平面

- $\mathbb{R}^2$ は座標平面（xy 平面）と同一視できるので $\mathbb{C}$ についても同様である．具体的には，複素数 $z = a + bi$ には座標平面の座標が (a, b) である点を対応させ，座標平面の座標が (a, b) である点には複素数 $z = a + bi$ を対応させる．このように定められた座標平面を**複素数平面**あるいは**複素平面**という．このとき x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という．虚軸上の点には $0 + bi = bi$ という形の複素数が対応する．bi $(b \neq 0)$ の形の複素数を**純虚数**という．

- 実軸と虚軸の交点（原点）には複素数 0 が対応し，アルファベットの O と名付ける．

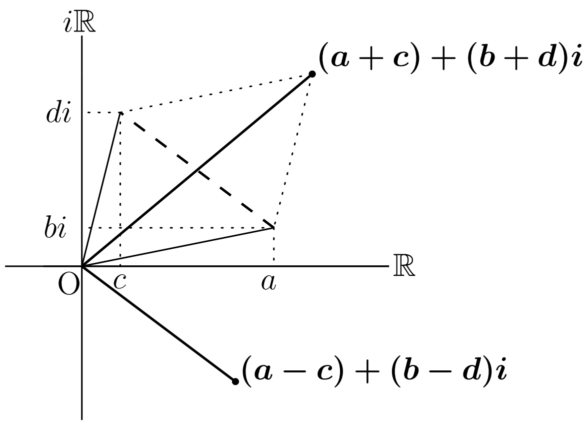


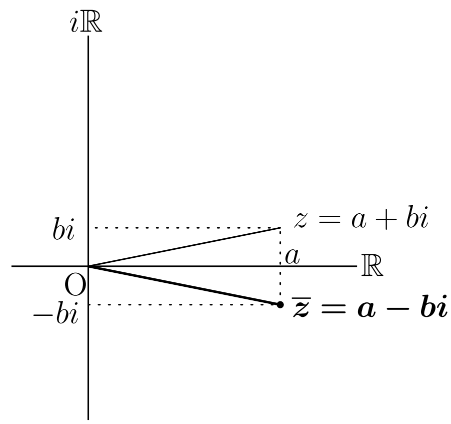
注 書物によっては虚軸に数を記す場合は虚部のみを表し i を書かない場合もあるが，本講義録では虚軸上には bi という数が割り当てられているという意味を込めて bi と書くことにする．

- $z = a + bi$, $w = c + di$ とするとき

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z - w = (a - c) + (b - d)i$$

および共役複素数 $\overline{z} = a - bi$ は複素数平面では次のように表される：



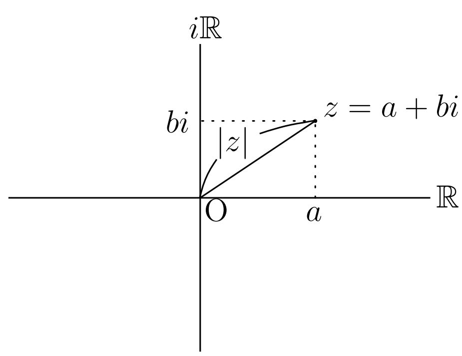


1.4　絶対値と偏角

1.4.1　絶対値

- 複素数 $z = a + bi$ (a, b ：実数) が表す複素数平面上の点は通常の座標平面において座標 (a, b) をもつ点である．その点と原点 O との距離は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である．これを複素数 $z = a + bi$ の**絶対値**といい，$|z|$ で表す．

> $z = a + bi$ において $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり，$|z|$ は複素数平面において z が表す点と原点との距離である．



- 計算から次のことがわかる：

$$\boldsymbol{|z|^2 = z\overline{z}, \quad |z| = |\overline{z}|}$$

命題 1.3

$z,\, w \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ.

(1) $|zw| = |z||w|$

(2) $|\mathrm{Re} z|,\, |\mathrm{Im} z| \leq |z|$

証明

(1) $|zw| \geq 0,\, |z||w| \geq 0$ より $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ を示せばよい．実際

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)\overline{(zw)} \\ &= (zw)(\overline{z}\ \overline{w}) \\ &= (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

(2) $z = a + bi$ とおくと $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である．ここで

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

であるので不等式が成り立つ．□

命題 1.4（三角不等式）

$z,\, w \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ.

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

証明 $|z + w| \geq 0,\, |z| + |w| \geq 0$ であるから

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned} &(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 \\ =&(|z| + |w|)^2 - (z + w)\overline{(z + w)} \\ =&(|z| + |w|)^2 - (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ =&(|z| + |w|)^2 - (z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w}) \\ =&(|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2) - (|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2) \\ =&2(|z||w| - \mathrm{Re}(z\overline{w})) \end{aligned}$$

ここで，命題 1.3(2) より

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$$

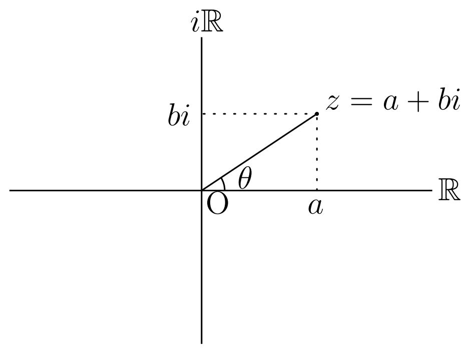
であるから

$$(|z| + |w|)^2 - |z + w| \geq 0$$

つまり $|z + w| \leq |z| + |w|$ が成り立つ．□

1.4.2　偏角

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ とする．複素数平面で z の表す点を P とするとき，線分 OP と実軸の正の部分のなす角を θ とする．θ を複素数 z の**偏角**といい，**arg*z*** とかく．
- もちろん，θ は z に対して一意的でなく，θ が 1 つ求まると，$\theta + 2n\pi$ (n：整数) と表される数はすべて偏角となる．しかし，議論をわかりやすくするため，偏角は 2π の整数倍を自由に加減してよいという自由を許容する．このことは「2π を法とする合同」という考え方を用いることにより正当化される．
- また 0 の偏角は定めない．



1.5　極形式

- $z = a + bi \in \mathbb{C}$ とする．$|z| = r$, z の偏角を θ とすれば $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ である（$z = a + bi$ は通常の座標平面上で考えれば座標は (a, b) であるので三角関数の定義から）ので

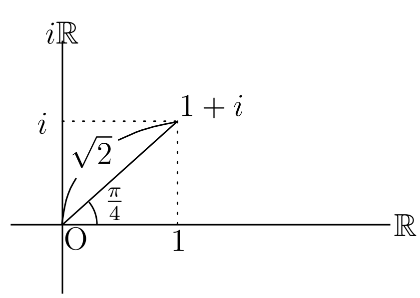
$$z = r\cos\theta + i(r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．これを複素数 z の**極形式**という．**Euler の公式**（後述）$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いれば z の極形式は $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ と表される．

例題 1

$z = 1 + i$ のとき，z を極形式で表せ．

解



$|z| = \sqrt{2}$, z の偏角（の 1 つ）は $\dfrac{\pi}{4}$ より極形式は

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

1.5.1　極形式と積・商

- 複素数 z_1, z_2 が極形式で次のように表されているとする．

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1, \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2 \end{aligned}$$

  とする．

- 積の定義から

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(r_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + ir_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= r_1r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\} \end{aligned}$$

- 商の定義より $r_2 \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2}{r_2^2} \\ &\qquad + i\frac{-r_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2}{r_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + i\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}$$

- 積により絶対値はそれぞれの積，偏角はそれぞれの和となる．
- 商により，絶対値は商，偏角は差となる．
- このことからも $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ がわかる．
- また 2π の整数倍の加減の自由を許し

$$\begin{aligned} \arg z_1z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2, \\ \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}$$

  が成り立つ．

命題 1.5（De Moivre の公式）

n を整数とするとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つ．

証明 $n=0$ のときは左辺 $=1$，右辺 $=\cos 0 + i\sin 0 = 1$ であるから成り立つ．$n \geq 1$ のときは数学的帰納法による（演習問題とする）．$n \leq -1$ のときは

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

であることに注意し，$-\theta = \phi$ とおき，$n \geq 1$ の場合に帰着できる．□

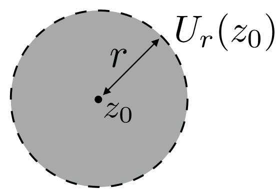
2　複素数平面の位相・数列の収束・級数

2.1　近傍・開集合・閉集合

- $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して $\mathbb{C}$ の部分集合

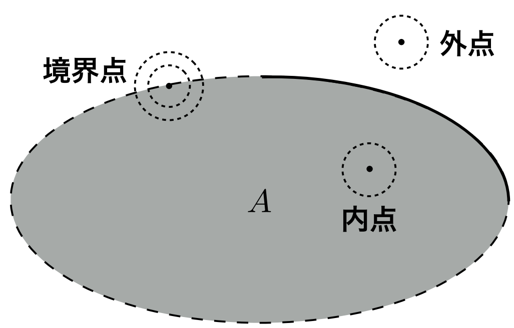
$$U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

　を中心 z_0, 半径 r の**開円板**あるいは z_0 の $\boldsymbol{r}-$ **近傍**という．



- $A \subset \mathbb{C}$ とする．
- $z \in \mathbb{C}$ が A の**内点**であるとは，ある $r > 0$ が存在して $U_r(z) \subset A$ が成り立つことである．$z \in U_r(z)$ はいつでも成り立つので A の内点は必ず A の点である．A の内点の集合を A° で表し A の**内部**という．
- $z \in \mathbb{C}$ が A の**外点**であるとは，z が A の補集合 A^c の内点であること，つまり，ある $r > 0$ が存在して $U_r(z) \subset A^c$ が成り立つことである．A の外点の集合を**外部**という．A の外部は A^c の内部 $(A^c)^\circ$ に他ならない．
- $z \in \mathbb{C}$ が A の内点でも外点でもないとき，z は A の**境界点**であるという．A の境界点は A の点であるとは限らない．A の境界点の集合を ∂A で表し A の**境界**という．
- $z \in \partial A$ であるとは，いかなる $r > 0$ に対しても $U_r(z) \subset A$ とも $U_r(z) \subset A^c$ ともできないということであるから次のようにいいかえることもできる：

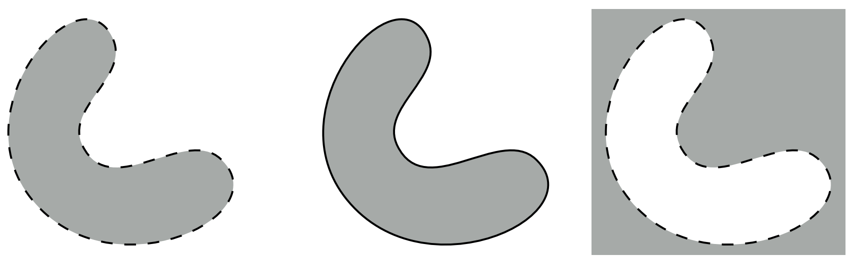
$$\begin{aligned} z \in \partial A \iff &\text{任意の } r > 0 \text{ に対して} \\ &U_r(z) \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U_r(z) \cap A^c \neq \emptyset \end{aligned}$$



- $\mathbb{C}$ の点は A の内点か境界点か外点のいずれかであるので $\mathbb{C}$ は
$$\mathbb{C} = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ$$
と共通部分のない和集合で表される．
- $A \subset \mathbb{C}$ に対して $A^\circ \cup \partial A$ を A の**閉包**といい $\overline{A}$ で表す．

例 $U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ に対して $\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ である．

- $A \subset \mathbb{C}$ が**開集合**であるとは A の点がすべて A の内点であることである，つまり，
$$\begin{aligned} A \text{ が開集合} &\iff {}^\forall z \in A,\ {}^\exists r > 0 \text{ s.t. } U_r(z) \subset A \\ &\iff A = A^\circ \ (A^\circ \subset A \text{ はいつでも成り立つ}) \end{aligned}$$
- $A \subset \mathbb{C}$ が**閉集合**であるとは A^c が開集合であることである．



開集合　　**閉集合**

注 空集合 $\emptyset$ は開集合であるとする．また，定義から $\mathbb{C}$ は開集合である．ここで $\emptyset^c = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^c = \emptyset$ より $\emptyset, \mathbb{C}$ は開集合でありかつ閉集合である．

- 「A が閉集合 $\Leftrightarrow$ A^c が開集合」より，$(A^c)^\circ = A^c$ である．したがって
$$\mathbb{C} = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ = A^\circ \cup \partial A \cup A^c$$
が成り立つ．これより $A^\circ \cup \partial A = A$ が成り立つ．したがって
$$A \text{ が閉集合} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = A$$

命題 2.1

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}$ の開集合全体とするとき次が成り立つ．

(1) $\emptyset, \mathbb{C} \in \mathcal{O}$

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(3) $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $O_\lambda \in \mathcal{O}$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda)$ である集合族とする．このとき $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

注 $\Lambda = \{1, 2, \cdots\}$ であれば $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = O_1 \cup O_2 \cup \cdots$ である．ここでは $\Lambda = [0, 1]$ などいわゆる「連続濃度」の無限個でもよい．

証明

(1) 注で述べた．

(2)
- $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ なら明らかである．
- $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$, $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ とする．
- $z \in O_1 \cap O_2$ とすると $z \in O_1$ より，ある $r_1 > 0$ が存在して $U_{r_1}(z) \subset O_1$ が成り立つ．$z \in O_2$ より，ある $r_2 > 0$ が存在して $U_{r_2}(z) \subset O_2$ が成り立つ．
- $r = \min\{r_1, r_2\}$ とすれば

$$U_r(z) \subset O_1 \quad \text{かつ} \quad U_r(z) \subset O_2$$

つまり $U_r(z) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ．これは $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ を意味する．

(3) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \neq \emptyset$ とする．$z \in \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ とするとある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $z \in O_{\lambda_0}$ である．$O_{\lambda_0} \in \mathcal{O}$ よりある $r > 0$ が存在して $U_r(z) \subset O_{\lambda_0} \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ である．これは $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ を意味する．□

命題 2.2

$\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$ の閉集合全体とするとき次が成り立つ．

(1) $\emptyset, \mathbb{C} \in \mathcal{F}$

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

(3) $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $F_\lambda \in \mathcal{F}$ $({}^\forall\lambda \in \Lambda)$ である集合族とする．このとき $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

証明

(1) 注で述べた．

(2) F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ とすると F_1^c, $F_2^c \in \mathcal{O}$ である．命題 2.1(2) より $F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{O}$ である．de Morgan の法則より

$$F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$$

である．よって $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ である．

(3) $F_\lambda \in \mathcal{F}$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda)$ とすると $F_\lambda^c \in \mathcal{O}$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda)$ である．命題 2.1(3) より $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c \in \mathcal{O}$ である．de Morgan の法則より

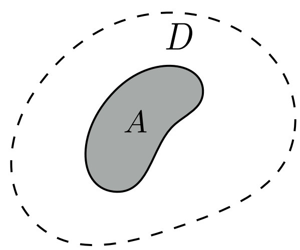
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c$$

であるから $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

□

2.2 有界集合・コンパクト集合

- $A \subset \mathbb{C}$ とする．ある $R > 0$ が存在して $A \subset U_R(0)$ が成り立つとき A は**有界**であるという．
- $A \subset \mathbb{C}$ が有界な閉集合であるとき A は**コンパクト（集合）**であるという．



D のコンパクト集合 A

- $D \subset \mathbb{C}$ を開集合，A を $A \subset D$ を満たすコンパクト集合とする．このとき A を $\underline{D\ の}$**コンパクト（集合）**という．
- $A \subset \mathbb{C}$ に対して次の性質を満たす開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の**開被覆**という：

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

- 次の定理はコンパクト集合の特徴づけとして重要である．

定理 2.3

$K \subset \mathbb{C}$ がコンパクトであるための必要十分条件は K の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}$ に対してある有限個の $O_{\lambda_1}, \cdots, O_{\lambda_n}$ が存在して

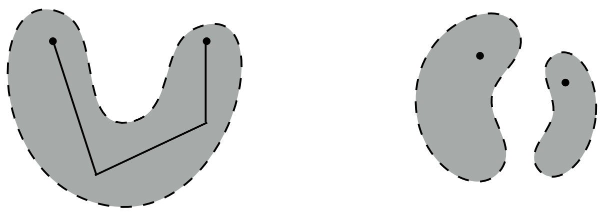
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$$

とできることである．

証明は補足で述べる.

2.3 連結性・領域

- 複素関数の定義域として，次の（弧状）連結性は基本的である.
- $A \subset \mathbb{C}$ が**弧状連結**であるとは A 内の任意の 2 点をを A 内の折れ線で結べることである.



A **弧状連結**　　A **弧状連結でない**

注

- 「折れ線」は「連続曲線」とおきかえてもよい.
- 本来の**連結**の定義は以下のとおりである：

$$A \subset \mathbb{C} \text{ が}\textbf{連結} \iff A = O_1 \cup O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset \quad (O_1,\ O_2 : \text{開集合})$$
$$\text{ならば}\quad O_1 = \emptyset \text{ または } O_2 = \emptyset$$

- $\mathbb{C}$ の開集合に対しては弧状連結と連結には差がない.
- 弧状連結な開集合を**領域**という.

2.4 数列の収束

- 複素数列 $\{z_n\}$ に対して，n を限りなく大きくしていくとき，z_n が一定の複素数 α に限りなく近づくとき z_n は α に**収束する**といい $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ と表す.
- 厳密な定義は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つこと.

注 複素数列 $\{z_n\}$ が α に収束し，かつ β に収束するならば $\alpha = \beta$ である（$\rightarrow$ 補足）

- 複素数列 $\{z_n\}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\mathrm{Re}\ z_n = x_n$, $\mathrm{Im}\ z_n = y_n$, $\mathrm{Re}\ \alpha = a$, $\mathrm{Im}\ a = b$ とすると

$$|x_n - a|, |y_n - b| \leq |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

が成り立つから次のことがわかる．

命題 2.4

複素数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n = \mathrm{Re}\ \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = \mathrm{Im}\ \alpha$$

である．

命題 2.5

複素数列 $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ はそれぞれ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に収束するとする．このとき

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \alpha + \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \alpha\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

証明は補足で述べる．

コンパクトと点列

複素数列 $\{z_n\}_n$ に対して，自然数の単調増加列

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \quad (\lim_{k\to\infty} n_k = \infty)$$

に対して $\{z_{n_k}\}_k$ と表される数列を $\{z_n\}_n$ の**部分列**という．次の性質もコンパクト集合を特徴付ける重要な性質である．

定理 2.6

$K \subset \mathbb{C}$ がコンパクトであるための必要十分条件は，K の任意の数列 $\{z_n\}$ に対して，ある $\alpha \in K$ に収束する $\{z_n\}$ の部分列をもつことである．

証明は補足で述べる．

2.5 級数

- 複素数列 $\{z_n\}$ に対して，各項を形式的に $+$ 記号で結んだもの

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

を**級数**といい $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ で表す．

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$ とおく．S_n を級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の**第 n 部分和**という．

定義

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の第 n 部分和を S_n とする．数列 $\{S_n\}$ がある $S \in \mathbb{C}$ に収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**収束する**といい，S を級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の**和**という．

命題 2.7

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ が成り立つ．

証明

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の第 n 部分和を S_n，この級数の和を S とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ である．
- $S_n - S_{n-1} = z_n \ (n \geq 2)$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

□

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき**絶対収束**するという．
- 次の 2 つの事実の証明は，複素関数論 II の講義資料で扱う．

命題 2.8

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば収束する．

命題 2.9

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の和は S であるとする．この級数の項の順序を入れ替えてできる級数を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ とする：

$$w_n = z_{\varphi(n)} \quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad 1 \text{ 対 } 1 \text{ 対応}$$

このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ も絶対収束し，和は S である．

2.6 補足

2.6.1 極限の一意性・収束する数列の有界性

命題 2.10

数列 $\{z_n\}$ が α に収束し，かつ β に収束するならば $\alpha = \beta$ である．

証明

- $\alpha \neq \beta$ とすると $|\alpha - \beta| > 0$ である．
- $\{z_n\}$ は α に収束するので $\varepsilon = |\alpha - \beta|/3 > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{3}$$

  同じく β に収束するので，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \beta| < \varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{3}$$

  よって $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ とすれば

$$0 < |\alpha - \beta| \leq |\alpha - z_n| + |z_n - \beta| < \frac{|\alpha - \beta|}{3} + \frac{|\alpha - \beta|}{3} = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

  であるがこれは矛盾である．□

命題 2.11

数列 $\{z_n\}$ は収束するならば有界である，つまりある $M > 0$ が存在して $|z_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．

証明

- 数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとする．数列の収束の $\varepsilon - n_0$ 式定義より，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < 1$$
が成り立つ．
- $|z_n - \alpha| \geq |z_n| - |\alpha|$ より $n \geq n_0$ ならば $|z_n| \leq |\alpha| + 1$ が成り立つ．
- よって $M = \max\{|z_1|, \cdots, |z_{n_0-1}|, |\alpha| + 1\}$ とすれば $|z_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．□

2.6.2 命題 2.5 の証明

(1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば
$$|z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},\ |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．よって $n \geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned}|(z_n + w_n) - (\alpha + \beta)| &\leq |(z_n - \alpha) + (w_n - \beta)| \\ &\leq |z_n - \alpha| + |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$
が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \alpha + \beta$ が証明された．

(2)
- $\{w_n\}$ は収束するので，命題 2.11 より，ある $M > 0$ が存在して $|w_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば
$$|z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$
が成り立つ．
- よって $n \geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned}|z_n w_n - \alpha\beta| &\leq |(z_n - \alpha)w_n + \alpha(w_n - \beta)| \\ &\leq |z_n - \alpha||w_n| + |\alpha||w_n - \beta| \\ &\leq |z_n - \alpha|M + |\alpha||w_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$
が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \alpha\beta$ が証明された．

(3)

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば
$$|w_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$
が成り立つ（$\beta \neq 0$ に注意）．
- 同様にして，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_1$ ならば
$$|w_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$
が成り立つ．これより $n \geq n_1$ ならば
$$\begin{aligned}|w_n| &= |\beta + (w_n - \beta)| = |\beta - \{-(w_n - \beta)\}| \\ &\geq |\beta| - |w_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}\end{aligned}$$
- よって $n \geq N := \max\{n_0, n_1\}$ ならば
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{\beta}\right| &= \frac{|\beta - w_n|}{|w_n||\beta|} = \left|\frac{w_n - \beta}{w_n\beta}\right| \\ &\leq \frac{|w_n - \beta|}{|w_n\beta|} < \frac{1}{\frac{|\beta|}{2}|\beta|} \cdot \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$
が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{w_n} = \dfrac{1}{\beta}$ が証明された．

2.6.3　定理 2.3 と定理 2.6 の証明の準備

コンパクト集合についての定理 2.3 と定理 2.6 の証明には実数の連続性の公理から導かれる実数の性質が必要である．かなり長くなるので，解析学を志す学生が読めば良い．また時間のあるときにゆっくり読めば良い．

閉集合の点列による定義

$A \subset \mathbb{C}$ が閉集合であることを点列による表現は以下のとおりである．

命題 2.12

数列 $A \subset \mathbb{C}$ が閉集合であるための必要十分条件は A 内の任意の点列 $\{z_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ ならば $\alpha \in A$ が成り立つことである．

証明

- A を閉集合とし，A の点列 $\{z_n\}$ が $z_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ とする．

- $\alpha \notin A$ つまり $\alpha \in A^c$ とすると，A^c は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$U_\varepsilon(\alpha) \subset A^c$ が成り立つ．
- $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ より，ある n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \varepsilon \ \text{ つまり } \ z_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

- しかし $U_\varepsilon(\alpha) \subset A^c$ であるから $z_n \in A^c$ $(n \geq n_0)$ となり $\{z_n\}$ が A の点列であることに反する．

逆に A の任意の点列 $\{z_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ ならば $\alpha \in A$ とする．このとき A が閉集合であることを示そう．そのためには $\overline{A} \subset A$ であることを示せばよい．

- $\alpha \in \overline{A}$ を任意にとると $\alpha \in A^\circ$ または $\alpha \in \partial A$ である．
- このとき $\varepsilon > 0$ に対して $A \cap B_\varepsilon(\alpha) \neq \emptyset$ であることに注意する．
- よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varepsilon = 1/n$ とすることにより $B_{1/n}(\alpha) \cap A \neq \emptyset$ である．
- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in B_{1/n}(\alpha) \cap A$ なる z_n をとることにより，A の点列 $\{z_n\}$ を構成する．この点列は $|z_n - \alpha| < 1/n$ を満たすので $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ である．
- 仮定から $\alpha \in A$ である．以上より $\overline{A} \subset A$ つまり $\overline{A} = A$ が成り立つ．

□

Cauchy 列

数列の収束を定義から示すためには $|z_n - \alpha| \to 0$ (as $n \to \infty$) となる α をみつけなければならないが，次の Cauchy 列の概念を用いればその必要がなくなる．

定義

数列 $\{z_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m,\ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

が成り立つ」ことである．

注 数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するならば Cauchy 列である．実際，収束の定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| &= |(z_m - \alpha) + (\alpha - z_n)| \\
&\leq |z_m - \alpha| + |z_n - \alpha| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $\{z_n\}$ は Cauchy 列である．

実数の連続性の公理から，実数全体 $\mathbb{R}$ は次の**完備性**という性質をもっている．

命題 2.13

実数列 $\{x_n\}$ について

$$\{x_n\} \text{ がある } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に収束する} \ \Leftrightarrow \ \{x_n\} \text{ は Cauchy 列}$$

このことを用いると $\mathbb{C}$ も完備性をもつことがわかる．

命題 2.14

複素数列 $\{z_n\}$ について

$$\{z_n\} \text{ がある } \alpha \in \mathbb{C} \text{ に収束する} \ \Leftrightarrow \ \{z_n\} \text{ は Cauchy 列}$$

証明 $(\Rightarrow)$ はすでに示したので $(\Leftarrow)$ を示す．

- $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n = \mathrm{Re} z_n,\ y_n = \mathrm{Im} z_n)$ とし，$\{z_n\}$ を Cauchy 列とする．
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

- ここで

$$|x_m - x_n|,\ |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$$

  より $m,\, n \geq n_0$ ならば

$$|x_m - x_n|,\ |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon$$

- よって，実数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は Cauchy 列であるのでそれぞれある実数 A, B に収束する．
- したがって命題 2.4 より $\{z_n\}$ も $A + Bi$ に収束する．□

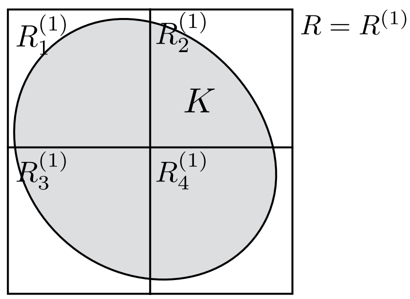
2.6.4　定理 2.6 の証明

「K がコンパクト集合 $\Rightarrow$ K の任意の数列 $\{z_n\}$ は K の点に収束する部分列を持つ」を証明する．

- $K \subset \mathbb{C}$ を有界閉集合とし，$K \subset R$ となる各辺が実軸あるいは虚軸に平行な閉長方形をとる:

$$R = \{z \in \mathbb{C} : -M \leq \mathrm{Re}\ z \leq M,\ -M \leq \mathrm{Im}\ z \leq M\}$$

- $R(= R^{(1)}$ とする$)$ の各辺の中点を結び，R を 4 つの閉長方形に分割し，$R_1^{(1)}, \cdots, R_4^{(1)}$ とする．$R_i^{(1)} \cap K$ の少なくとも 1 つには数列 $\{z_n\}$ の項が無限個存在する．そのうち 1 つを $R^{(2)}$ とする．



- $R^{(2)}$ を同じように $R_1^{(2)}, \cdots, R_4^{(2)}$ と 4 等分すると，$R_i^{(2)} \cap K$ の中で少なくとも 1 つには数列 $\{z_n\}$ の項が無限個存在する．そのうち 1 つを $R^{(3)}$ とする．

- 以下同様に $R^{(k)} \supset R^{(k+1)}$ かつ $R^{(k)} \cap K$ には数列 $\{z_n\}$ の項が無限個存在するような閉長方形の列が構成できる．

- $R^{(1)} \cap K$ には数列 $\{z_n\}$ の項がすべてあるので $z_1 \in R^{(1)} \cap K$ が成り立つ．

- $R^{(2)} \cap K$ には数列 $\{z_n\}$ の項が無限個あるので $n_2 > 1$ なる n_2 が存在して $z_{n_2} \in R^{(2)} \cap K$ が成り立つ．

- 以下同様に $n_k > n_{k-1}$ かつ $z_{n_k} \in R^{(k)} \cap K$ となる n_k が存在する．

- こうした $\{z_{n_k}\}$ は任意の k に対して $z_{n_m} \in R^{(k)} \cap K$ $(m \geq k)$ が成り立つ．

- $R^{(k)}$ の対角線の長さは $\sqrt{2}\frac{2M}{2^{k-1}} \to 0$ as $k \to \infty$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\sqrt{2}\frac{2M}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$ となる k_0 をとれば $k, l \geq k_0$ ならば $z_{n_k}, z_{n_l} \in R^{(k_0)} \cap K$ であるから

$$|z_{n_k} - z_{n_l}| < \sqrt{2}\frac{2M}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$$

  となるので $\{z_{n_k}\}$ は K の点列で $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である．

- $\mathbb{C}$ の完備性（命題 2.14）により $\{z_{n_k}\}$ はある $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束する．$\{z_{n_k}\}$ は K の点列であるから命題 2.12 より $\alpha \in K$ である．

「K の任意の数列 $\{z_n\}$ が K の点に収束する部分列をもつ $\Rightarrow$ K はコンパクト集合」を証明する．

- K が有界であることを証明する．もし K が有界でないとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|z| \geq n$ かつ $z \in K$ となる z が存在する．
- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，上にような z を z_n とすると K 内の点列 $\{z_n\}$ が構成できる．
- $\{z_n\}$ の任意の部分列 $\{z_{n_k}\}$ に対して $|z_{n_k}| \geq n_k \geq k$ より $\lim_{n \to \infty} |z_{n_k}| = \infty$ となるので $\{z_n\}$ のいかなる部分列も収束し得ないので矛盾である．したがって K は有界である．
- 次の K が閉集合であることを証明する．そのためには命題 2.11 より，K の点列 $\{z_n\}$ が $\lim_{n \to \infty} z_n = \alpha$ ならば $\alpha \in K$ であることを示せばよいが，$\{z_n\}$ の任意の部分列は同じく α に収束するので仮定から $\alpha \in K$ である．よって示された．

□

2.6.5 定理 2.3 の証明

<u>**Step 1**</u>：K を各辺が実軸あるいは虚軸に平行な次のような閉長方形 R であるとする：

$$R = \{z \in \mathbb{C} : -M \leq \mathrm{Re}\, z \leq M,\ -M \leq \mathrm{Im}\, z \leq M\}$$

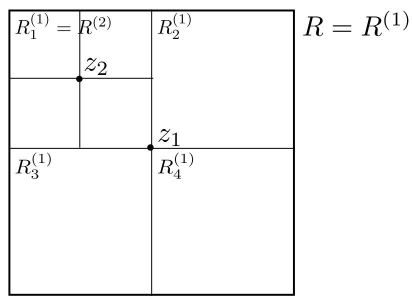
このとき K の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}$ に対して，有限個の O_λ たちで K が覆えることを示す．

- $R = R^{(1)}$ とおき，R の開被覆 $\{O_\lambda\}$ を任意にとる．結論を否定して，いかなる有限個の O_λ たちでも R を覆えないとする．定理 2.6 の証明と同様にして $R^{(1)}$ を 4 等分し，$R_1^{(1)}, \cdots, R_4^{(1)}$ とすると，このうち少なくとも 1 つはいかなる有限個の O_λ たちでも覆えない．なぜならばすべての $R_i^{(1)}$ が有限個の O_λ たちで覆えたら R 自身も有限個の O_λ たちで覆えることになってしまう．したがって，そのようなものを 1 つ選び $R^{(2)}$ とする．つまり $R^{(2)}(\subset R^{(1)})$ はいかなる有限個の O_λ たちでも覆えない．
- $R^{(2)}$ を同じく 4 等分して $R_1^{(2)}, \cdots, R_4^{(2)}$ をつくるとこのうち少なくとも 1 つはいかなる有限個の O_λ たちも覆うことはできない．そのようなものを 1 つ選び $R^{(3)}$ とする．
- 以下同様に閉長方形の列 $\{R^{(k)}\}$ で
  - $R^{(k)} \supset R^{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$

- 任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して $R^{(k)}$ はいかなる有限個の O_λ たちで覆うことはできない．

となるものが構成できる．

- 各 $k = 1, 2, \cdots$ に対して $z_k \in R^{(k)}$ なる z_k として閉長方形の対角線の交点をとる．$\{z_k\}$ は K の点列である．
- 任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して $z_k \in R^{(m)}$ $(m \geq k)$ が成り立つことに注意する．



- $R^{(k)}$ の対角線の長さは $\sqrt{2}\frac{2M}{2^{k-1}} \to 0$ $(k \to \infty)$ であるので，任意に $\varepsilon > 0$ に対して，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\sqrt{2}\frac{2M}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$ が成り立つ．
- よって $k, l \geq k_0$ ならば $z_k,\, z_l \in R^{(k_0)}$ であるので
$$|z_k - z_l| \leq \sqrt{2}\frac{2M}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$$
が成り立つ．つまり $\{z_n\}$ は K の Cauchy 列である．
- したがって命題 2.14 より $\{z_n\}$ はある $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するが K は閉集合であるので命題 2.11 より $\alpha \in K$ である．
- $\{O_\lambda\}$ は K の開被覆なので $\alpha \in O_{\lambda_0}$ となる λ_0 が存在する．
- O_{λ_0} は開集合であるので，ある $r > 0$ が存在して $U_r(\alpha) \subset O_{\lambda_0}$ が成り立つ．
- 上の $r > 0$ に対して，ある $k_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_1$ ならば $R^{(k)} \subset U_{r/2}(z_k)$ が成り立つ．
- $\{z_k\}$ は α が収束するので, k_1 を十分大きくとれば $k \geq k_1$ ならば $|z_k - \alpha| < r/2$ が成り立つ．
- したがって $k \geq k_1$ ならば $z \in R^{(k)}$ ならば $z \in U_{r/2}(z_k)$ である．したがって
$$|z - \alpha| \leq |z - z_k| + |z_k - \alpha| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

よって $z \in U_r(\alpha)$ が成り立つ．つまり $R^{(k)} \subset U_r(\alpha) \subset O_{\lambda_0}$ である．しかし，$R^{(k)}$ がいかなる有限個の O_λ たちでも覆えないという仮定に反する．したがって K が閉長方形のとき，K の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}$ に対して，ある有限個の O_λ たちで覆える．

Step 2：K を任意の有界閉集合の場合，K の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}$ に対して有限個の O_λ たちで K が有限個の O_λ たちで覆えることを証明しよう．

- K の開被覆 $\{O_\lambda\}$ を任意にとる．
- K は有界であるので $K \subset R$ なる閉長方形 R をとることができる．
- K は閉集合 K^c は開集合であり，開被覆 $\{O_\lambda\}$ に K^c を加えると，R の開被覆である．
- Step 1 より $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{K^c\}$ の中から有限個の開集合を選んで R を覆うことができる．つまり，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が存在して

$$R \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n} \cup K^c$$

- $K \subset R$ であるから

$$K \subset R \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n} \cup K^c$$

  であるが，$K \cap K^c = \emptyset$ であるから K を覆うのに K^c は不要である．

- 以上より $K \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ が成り立つ．

Step 3：「K の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}$ に対して，有限個の O_λ たちで K を覆えることができる $\Rightarrow$ K は有界閉集合」を証明する．

- まず K は有界であることを証明する．$\{U_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は K の開被覆である．よって有限個の $U_{n_1}(0), \cdots, U_{n_k}(0)$ たちで K を覆うことができる．$R = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ とおくと $K \subset U_R(0)$ となるので K は有界である．
- 次に K は閉集合であることを証明する．そのためには K^c は開集合であることを証明すればよい．任意に $z \in K^c$ をとる．このときある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(z) \subset K^c$ となることを示せばよい．
- $y \in K$ に対して $\varepsilon_y = |z - y|/2 > 0$ とおくと $U_{\varepsilon_y}(y) \cap U_{\varepsilon_y}(z) = \emptyset$ である．
- $y \in U_\varepsilon(y)$ であるから $K \subset \displaystyle\bigcup_{y \in K} U_{\varepsilon_y}(y)$ である，つまり $\{U_{\varepsilon_y}(y)\}_{y \in K}$ は K の開被覆である．

- 仮定から K はこの開被覆のなかから有限個の開集合を選んで K を覆うことができる，つまり，ある $y_1, \cdots, y_k \in K$ が存在して

  $$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$$

  が成り立つ．$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_1}, \cdots, \varepsilon_{y_k}\}$ とおくと

  $$U_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) \cap U_\varepsilon(z) = \emptyset \quad (i = 1, \cdots, k)$$

  である．とくに

  $$K \cap U_\varepsilon(z) = \emptyset \quad (i = 1, \cdots, k)$$

  である．つまり $U_\varepsilon(z) \subset K^c$ となる．つまり K^c は開集合である．□

3 複素関数とその極限・連続性

3.1 複素関数

- 変数 z, w は複素数の値をとるものとする．変数 z の値を 1 つ定めると，変数 w の値がただ 1 つ定まるとき，w は z の**関数**であるといい，$w = f(z)$ と表す．z も w も複素数の値をとるので，特に**複素関数**という．

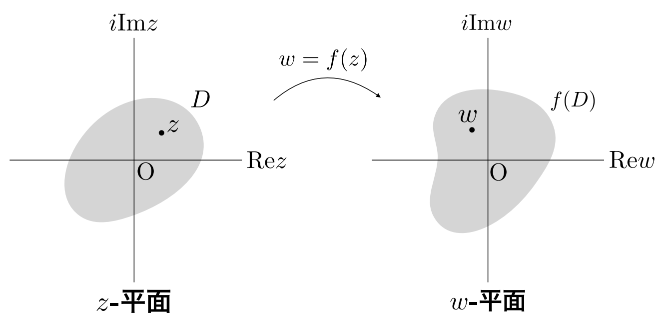
- 変数 z としてある $D(\subset \mathbb{C})$ に属する複素数しか考えないとき，関数 $f(z)$ は D 上の関数といい，D を**定義域**という．このとき，この関数を $f : D \to \mathbb{C}$ ともかく．また，$\alpha \in D$ に対して $f(\alpha)$ をこの関数の α における**値**という．

- 複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と $S \subset D$ に対して $\mathbb{C}$ の部分集合

$$\{w \in \mathbb{C} \mid w = f(z)\ (z \in S)\} = \{f(z) \in \mathbb{C} \mid z \in S\}$$

  を S の関数 $f(= f(z))$ による**像**といい，$f(S)$ と表す．$S = D$ のとき $f(D)$ を**値域**という．

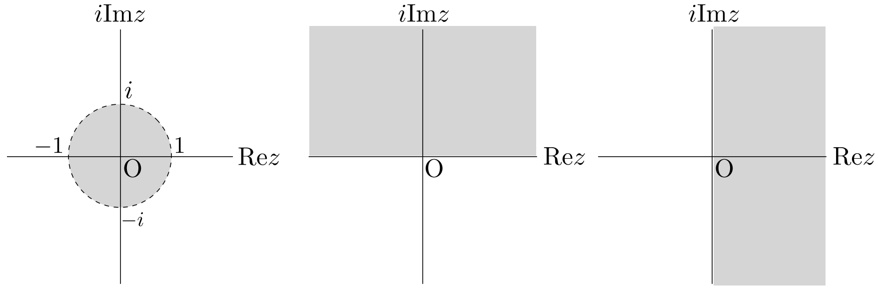
- 複素関数 $w = f(z)$ について，変数 z の属する複素数平面を z-平面，変数 w の属する複素数平面を w-平面とよぶことにすると，複素関数は z-平面から w-平面への**写像**と見ることができる．



- 複素関数の定義域として例えば

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}\ \textbf{単位円板},\ \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}\ \textbf{上半平面},$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}\ \textbf{右半平面}$$

  は基本的である．



例題 1

複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ を考える．$b > 0$ に対して

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z = b\}$$

とするとき，S の f による像 $f(S)$ を求めよ．

解

- $z = x + yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$, $w = u + vi$ $(u,\, v \in \mathbb{R})$, $w = \dfrac{1}{z}$ とおく．
- $z \in S \Leftrightarrow y = b$ であるから $w = \dfrac{1}{z}$ は

$$u + vi = \frac{1}{x + bi} \quad \Leftrightarrow \quad u + vi = \frac{x}{x^2 + b^2} - \frac{b}{x^2 + b^2} i$$

より $u = \dfrac{x}{x^2 + b^2}$, $v = -\dfrac{b}{x^2 + b^2}$ である．計算より

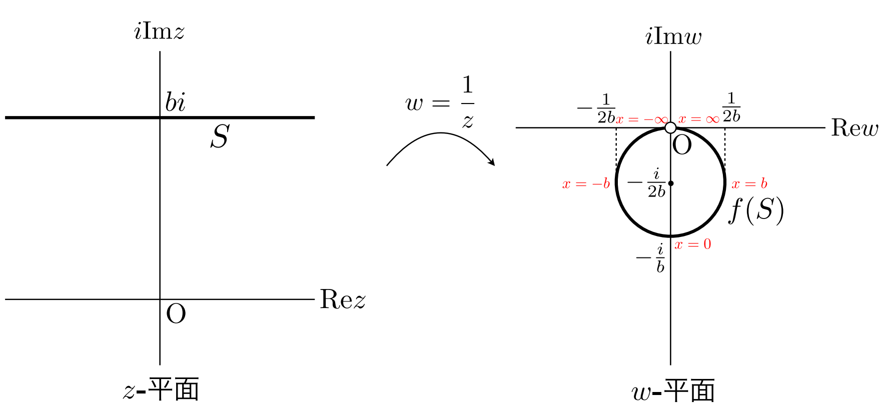
$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + b^2}, \quad -\frac{v}{b} = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

であるから

$$u^2 + v^2 = -\frac{v}{b} \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2}$$

ここで $v = -\dfrac{b}{x^2 + b^2} \neq 0$ より，求める $f(S)$ は

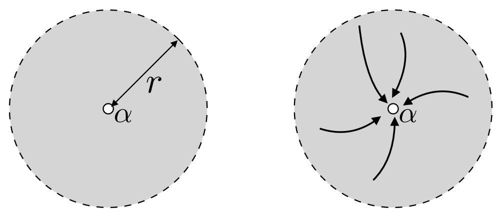
$$f(S) = \left\{ u + vi \in \mathbb{C} \;\middle|\; u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2} \right\} \setminus \{0\}$$



3.2 複素関数の極限

- 複素関数の極限を定義しよう．素朴には $\lim_{z\to\alpha} f(z) = A$ とは，z が α 以外の値を取りながら，α に近づくとき，$f(z)$ の値が限りなく一つの複素数 A に近づくことをいう．このことの厳密な定義を与える．z は α 以外の値をとることから $f(z)$ は α で定義されている必要はない．

- まず，ある $r > 0$ が存在して，$U_r(\alpha)\setminus\{\alpha\}$ （α の**除外近傍**）で $f(z)$ が定義されている場合を考える：



$U_r(\alpha)\setminus\{\alpha\}$

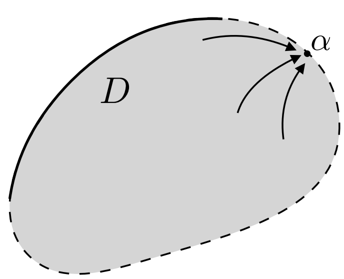
この場合の定義は以下の通りである：

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |z-\alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - A| < \varepsilon$$

が成り立つとき，z が α に近づくとき，$f(z)$ は A に**収束する**といい，$\lim_{z\to\alpha} f(z) = A$ と表す．また，A を z が α に近づくときの $f(z)$ の**極限値**という．

- α のいかなる除外近傍も $f(z)$ の定義域 D に含まれない場合，つまり $\alpha \in \partial D$ のときを考える：



この場合の定義は以下の通り：

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |z-\alpha| < \delta,\ \underline{z \in D} \quad \Rightarrow \quad |f(z) - A| < \varepsilon$$

が成り立つとき，同様に $\lim_{z\to\alpha} f(z) = A$ と表す．

命題 3.1

$\lim_{z \to \alpha} f(z) = A$, $\lim_{z \to \alpha} g(z) = B$ のとき

(1) $\lim_{z \to \alpha} \{f(z) + g(z)\} = A + B$

(2) $\lim_{z \to \alpha} f(z)g(z) = AB$

(3) $\lim_{z \to \alpha} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{B}$ $(B \neq 0)$

証明は補足で述べる．

3.3 関数の連続性

- $D \subset \mathbb{C}$ とし，関数 $f(z)$ は D で定義されているとする．$f(z)$ が $\alpha \in D$ で**連続**であるとは

  $$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

  が成り立つことである．今度は関数 $f(z)$ は α で定義されている必要がある．厳密な定義は以下の通りである：

  任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

  $$|z - \alpha| < \delta, \quad z \in D \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

  が成り立つ．

- $f(z)$ が D の各点で連続であるとき，$f(z)$ は$\underline{D\ で}$**連続**であるという．

命題 3.2

関数 $f(z)$ は D で定義されているとする．$f(z)$ が $\alpha \in D$ で連続であるための必要十分条件は，α に収束する D 内の任意の数列 $\{z_n\}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(\alpha)$ が成り立つことである．

証明 「$f(z)$ が α で連続」ならば「$z_n \in D$, $z_n \to \alpha \Rightarrow f(z_n) \to f(\alpha)$」を証明する．

- $f(z)$ は α で連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

  $$|z - \alpha| < \delta, \ z \in D \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

  が成り立つ．

- $\{z_n\}$ を α に収束する D の任意の数列とする．

- $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ より，上の $\delta > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \delta$$

が成り立つ．$z_n \in D$ であるから，これとあわせて

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f(z_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\alpha)$ を意味する．

「$z_n \in D$, $z_n \to \alpha$ なる任意の $\{z_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\alpha)$」ならば「$f(z)$ は α で連続」を示す．

- $f(z)$ が α で連続でないとすると，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，どんな $\delta > 0$ をとっても

$$|z - \alpha| < \delta,\ z \in D \text{ であるにもかかわらず } |f(z) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0$$

となる z が存在することになる．

- $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすることにより，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$|z - \alpha| < \frac{1}{n},\ \ z \in D \ \text{ かつ } \ |f(z) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0$$

となる z が存在する．各 n に対してこのような z を 1 つずつとり z_n とする．

- このとき $\{z_n\}$ は D の数列で，さらに $|z_n - \alpha| < 1/n$ より $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ が成り立つ．

- 仮定より $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\alpha)$ であるはずだが $|f(z_n) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0$ であるので矛盾．以上より $f(z)$ は α で連続である．□

上のことを用いると次のことがすぐわかる．

命題 3.3

関数 $f(z), g(z)$ は D で定義されており，ともに $\alpha \in D$ で連続であるとする．このとき

(1) $(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ は α で連続

(2) $(fg)(z) := f(z)g(z)$ は α で連続

(3) $g(\alpha) \neq 0$ のとき $\left(\dfrac{1}{g}\right)(z) := \dfrac{1}{g(z)}$ は α で連続

- $z = x + yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ とおくと $f(z)$ は $x,\, y$ の２変数関数と考えることができる．$f(z)$ も実部と虚部に分けるとそれぞれが $x,\, y$ の２変数関数となる：

$$\begin{aligned} &f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \\ &\mathrm{Re}\ f(z) = u(x,y),\ \mathrm{Im}\ f(z) = v(x,y) \end{aligned}$$

- $\alpha = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ とおくと $f(\alpha) = u(a,b) + iv(a,b)$ であり

$$\begin{aligned} |u(x,y) - u(a,b)|,\ |v(x,y) - v(a,b)| &\leq |f(z) - f(\alpha)| \\ &\leq |u(x,y) - u(a,b)| + |v(x,y) - v(a,b)| \end{aligned}$$

であることから次のことがわかる：

命題 3.4

関数 $f(z)$ は D で定義されているとする．$f(z)$ が $\alpha = a + bi \in D$ で連続であるための必要十分条件は Re $f(z)(= u(x,y))$, Im $f(z)(= v(x,y))$ がともに α で（(a,b) で）連続であることである．

- また，三角不等式 $|A + B| \leq |A| + |B|$ より

$$|A| = |A - B + B| \leq |A - B| + |B|$$

であるから $|A| - |B| \leq |A - B|$ を得る．A と B を入れかえて得られる式と合わせて

$$||A| - |B|| \leq |A - B|$$

を得る．

- これを用いると

$$||f(z)| - |f(\alpha)|| \leq |f(z) - f(\alpha)|$$

であるから

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to \alpha} |f(z)| = |f(\alpha)|$$

が成り立つ．つまり次を得る：

命題 3.5

関数 $f(z)$ は D で定義されているとし，$\alpha \in D$ とする．

$$f(z) \text{ が } \alpha \text{ で連続} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \text{ は } \alpha \text{ で連続}$$

- D で定義された関数 $f(z)$ に対して $|f(z)|$ は D で定義された実数値関数であるから，有界性や最大値を考えることができる．
- $\{|f(z)| \mid z \in D\} \subset \mathbb{R}$ が有界，つまりある $M > 0$ が存在して
$$|f(z)| \leq M \quad (z \in D)$$
が成り立つとき，$f(z)$ は**有界**であるという．
- ある $\alpha \in D$ が存在して
$$|f(z)| \leq |f(\alpha)| \quad (z \in D)$$
が成り立つとき，$|f(\alpha)|$ は $|f(z)|$ の**最大値**であるという．
- 次のことが成り立つ．

定理 3.6

$K \subset \mathbb{C}$ はコンパクト集合とし，関数 $f(z)$ は K で連続であるとする．このとき $|f(z)|$ は K で最大値をとる．つまり，ある $\alpha \in K$ が存在して
$$|f(z)| \leq |f(\alpha)| \quad (z \in K)$$
が成り立つ．

証明は補足で述べる．

3.4 補足

3.4.1 命題 3.1 の証明

(1) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{z \to \alpha} f(z) = A$ より，ある $\delta_1 > 0$ が存在して
$$0 < |z - \alpha| < \delta_1, \ \ z \in D \quad \Rightarrow \quad |f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．同様に $\lim_{z \to \alpha} g(z) = B$ より，ある $\delta_2 > 0$ が存在して
$$0 < |z - \alpha| < \delta_2, \ \ z \in D \quad \Rightarrow \quad |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおく．$0 < |z - \alpha| < \delta$, $z \in D$ ならば
$$|(f(z) + g(z)) - (A + B)| \leq |f(z) - A| + |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
が成り立つ．これは $\lim_{z \to \alpha}\{f(z) + g(z)\} = A + B$ を意味する．

(2) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{z\to\alpha} g(z) = B$ より，ある $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < |z-\alpha| < \delta_1,\quad z \in D \quad\Rightarrow\quad |g(z)-B| < 1$$

が成り立つ．$|g(z)| - |B| \leq |g(z)-B|$ であるから

$$0 < |z-\alpha| < \delta_1,\quad z \in D \quad\Rightarrow\quad |g(z)| \leq |B|+1$$

が成り立つ．次に $\lim_{z\to\alpha} f(z) = A$, $\lim_{z\to\alpha} g(z) = B$ よりある $\delta_2 > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}&0 < |z-\alpha| < \delta_2,\quad z \in D \quad\Rightarrow\\ &\qquad\qquad |f(z)-A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)},\quad |g(z)-B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}\end{aligned}$$

よって，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |z-\alpha| < \delta$, $z \in D$ ならば

$$\begin{aligned}|f(z)g(z)-AB| &= |(f(z)-A)g(z) + A(g(z)-B)|\\ &\leq |f(z)-A||g(z)| + |A||g(z)-B|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}(|B|+1) + |A|\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} = \varepsilon\end{aligned}$$

これは $\lim_{z\to\alpha} f(z)g(z) = AB$ を意味する．

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\lim_{z\to\alpha} g(z) = B$ より，ある $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < |z-\alpha| < \delta_1,\ z \in D \quad\Rightarrow\quad |g(z)-B| < \frac{|B|}{2}$$

が成り立つ（$B \neq 0$ に注意）．これより $0 < |z-\alpha| < \delta_1$, $z \in D$ ならば

$$|g(z)| = |B-(B-g(z))| \geq |B| - |B-g(z)| > \frac{|B|}{2} \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{|g(z)|} < \frac{2}{|B|}$$

が成り立つ．再び $\lim_{z\to\alpha} g(z) = B$ より, ある $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < |z-\alpha| < \delta_2,\ z \in D \quad\Rightarrow\quad |g(z)-B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成り立つ．ここで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと，$0 < |z-\alpha| < \delta$, $z \in D$ ならば

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(z)}{g(z)B}\right| = \frac{1}{|B||g(z)|}|g(z)-B| < \varepsilon$$

これは $\lim_{z\to\alpha}(1/g(z)) = 1/B$ を意味する．

3.4.2　定理 3.6 の証明

上限

- 定理 3.6 の証明には，実数の部分集合についての上限の概念が必要であるのでそこから説明する．
- $A \subset \mathbb{R}$ を空集合でないとする．このとき，ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a \in A \quad \Rightarrow \quad a \leq m$$

  が成り立つとき，A は**上に有界**であるといい，m を A の**上界**という．m が A の上界ならば当然 m より大きい数はすべて A の上界となる．したがって A の上界のうちできる限り小さいものに意味がある．A が上に有界であるとき集合

$$\{m \in \mathbb{R} | \ m \text{ は } A \text{ の上界}\}$$

  とするとき，これは $\mathbb{R}$ の空でない部分集合である．この集合に最小元 m_0 が存在するとき，この m_0 を A の**上限**といい，$\boldsymbol{\sup A}$ と表す．
- 「数直線に穴がない」ということを表す「実数の連続性の公理」から次のことが導かれる（ここでは証明は省略する．解析学の大前提だと思ってよい）：

> $A \subset \mathbb{R}$ が空でなく，上に有界であるならば A の上限 $\sup A$ が存在する．

- m_0 が A の上限であるとは，A の上界の中で一番小さいものであるということであるから，m_0 より小さい数はもはや A の上界とはならない．つまり m_0 より小さい数は A のすべての数を上から抑えることはできなくなっている．

> **上限の特徴付け**　$A \subset \mathbb{R}$ を空でなく上に有界とする．このとき $m_0 = \sup A$ であるための必要十分条件は
>
> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m_0 - \varepsilon < a$ なる $a \in A$ が存在すること
>
> である．

定理 3.6 の証明

Step 1：$f(z)$ が K で連続であるとき，有界であること　つまり $\{|f(z)| \mid z \in K\}$ が上に有界であることを証明する．

- 上に有界でないとすると，

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して，} |f(z)| > n \text{ となる } z \in K \text{ が存在する．}$$

- 各 n に対して上のような z を 1 つ選び，z_n とする．
- このように構成した数列 $\{x_n\}$ はコンパクト集合 K 内の数列である．したがって定理 2.6 より $\{z_n\}$ のある部分列 $\{z_{n_k}\}$ で，ある $\alpha \in K$ に収束するものが存在する．
- f は K で連続であるから，命題 3.2 より $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(\alpha)$ が成り立つ．
- 一方，n_k は自然数からなる単調増加数列の k 番目の項であるから $n_k \geq k$ がすべての $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．このことに注意すると

  $$|f(z_{n_k})| > n_k \geq k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

  である．したがって $\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = \infty$ である．これは矛盾である（$f(z)$ は複素数値関数であるから $f(\alpha)$ は複素数，したがって $|f(\alpha)|$ は有限の実数値である！）．したがって上に有界である．

Step 2： $|f(z)|$ は最大値をとることを示す．

- Step 1 より，$\{|f(z)| \mid z \in K\}$ は上に有界であるので $M := \sup\{|f(z)| \mid z \in K\}$ が存在する．M は $\{|f(z)| \mid z \in K\}$ の上界であるから

  $$z \in K \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M$$

  が成り立つ．したがって $|f(\alpha)| = M$ となる $\alpha \in K$ が存在することを示せばよい．
- 上限の特徴づけより，

  $n \in \mathbb{N}$ に対して $M - \dfrac{1}{n} < w \leq M$ となる $w \in \{|f(z)| \mid z \in K\}$ が存在する．
- 各 n に対して上のような w を 1 つ選び，w_n とすると $w_n \in \{|f(z)| \mid z \in K\}$ より $w_n = |f(z_n)|$ となる $z_n \in K$ が存在する．
- このように構成した数列 $\{z_n\}$ はコンパクト集合 K 内の数列であるので，定理 2.6 より $\{z_n\}$ のある部分列 $\{z_{n_k}\}$ で，ある $\alpha \in K$ に収束するものが存在する．
- 命題 3.5 より $|f(z)|$ は K で連続であるから，命題 3.2 より $\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = |f(\alpha)|$ が成り立つ．
- 同様に $n_k \geq k$ であるから $M - \dfrac{1}{k} \leq M - \dfrac{1}{n_k}$ であることに注意すると

  $$M - \frac{1}{k} \leq M - \frac{1}{n_k} < |f(z_{n_k})| \leq M$$

  が成り立つ．この不等式で $k \to \infty$ とすることにより $\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = M$ が成り立つ．以上より $M = |f(\alpha)|$ であり，$z = \alpha$ で $|f(z)|$ は最大値をとる．□

4　複素関数の微分可能性

4.1　複素関数の微分可能性

- $D \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$f(z)$ は D で定義されているとする．
- $f(z)$ が $z_0 \in D$ で**微分可能**であるとは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在することである．このとき，この極限値を $f'(z_0)$ とかき，$f(z)$ の z_0 における**微分係数**という：

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

- $f(z)$ が z_0 で微分可能であるということを少し詳しくみてみよう．$f(z)$ が z_0 で微分可能であるとは言いかえると，ある $A \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \right\} = 0$$

が成り立つことであり，この A を $f'(z_0)$ とかくのである．

- ここで

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \quad (z \neq z_0)$$

とおくと

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + g(z)(z - z_0) \quad (z \neq z_0)$$

が成り立つ．ここで $g(z)(z - z_0)$ は $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ より $z \to z_0$ のとき $|z - z_0|$ よりはやく 0 に収束する，いいかえると $|z - z_0|$ より高次の項であるということになる．

- したがって $f(z)$ が z_0 で微分可能であるとは，ある $A \in \mathbb{C}$ が存在して

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon \cdot (z - z_0)$$

が成り立つ．ただし ε は $\lim_{z \to z_0} \varepsilon = 0$ を満たす．

あるいは $z = z_0 + \Delta z$ とすれば

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + A\Delta z + \varepsilon \Delta z \qquad \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0$$

とも言いかえられる．

- また，$f(z)$ が z_0 で微分可能であるとき

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) & z \neq z_0, \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

とすれば $g(z)$ は z_0 で連続であり

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + g(z)(z-z_0)$$

が成り立つ．まとめよう．

命題 4.1

関数 $f(z)$ は領域 D で定義されているとする．

(1) $f(z)$ が $z_0 \in D$ で微分可能 $\Leftrightarrow$ ある $A \in \mathbb{C}$ が存在して

$$f(z) = f(z_0) + A(z-z_0) + \varepsilon(z-z_0) \qquad \lim_{z\to z_0} \varepsilon = 0 \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(2) $f(z)$ が $z_0 \in D$ で微分可能ならば

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) & z \neq z_0, \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

とおくと $g(z)$ は $z = z_0$ で連続で

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + g(z)(z-z_0)$$

が成り立つ．

- $f(z)$ が領域 D の各点で微分可能であるとき，$z \in D$ に対して z における $f(z)$ の微分係数 $f'(z)$ を対応させる関数を $f(z)$ の**導関数**といい，$f'(z)$ の他，$\dfrac{df}{dz}$ あるいは関数が $w = f(z)$ と表される場合は $\dfrac{dw}{dz}$ などと表す．
- 導関数について，実数値関数の場合と同様に次の公式が成り立つ．

命題 4.2

関数 $f(z)$, $g(z)$ は領域 D の各点で微分可能であるとする．このとき次が成り立つ．

(1) $\{f(z)+g(z)\}' = f'(z)+g'(z)$

(2) α を定数とすると $\{\alpha f(z)\}' = \alpha f'(z)$

(3) $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(4) $g(z) \neq 0$ であれば

$$\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$$

命題 4.3

D, $V \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$f : D \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$, $f(D) \subset V$ とすると，合成関数 $g(f(z))$ が定義される．$f(z)$ が各 $z \in D$ で，$g(w)$ が各 $w \in V$ で微分可能ならば，合成関数 $g(f(z))$ は各 $z \in D$ で微分可能で

$$\{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z)$$

が成り立つ．

4.2 Cauchy-Riemann の関係式

- $f(z)$ は領域 D 上の関数とする．$z = x+yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ とし $\mathrm{Re}f(z)$, $\mathrm{Im}f(z)$ をそれぞれ x, y の関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ とすると

$$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$$

と表されることを学んだ．

- $u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x,y) の関数として連続であれば $f(z)$ は連続である．しかし，微分可能性については事情が異なる．

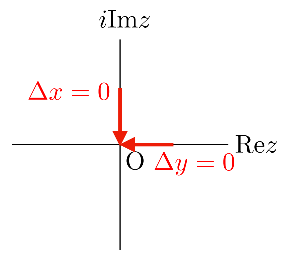
- $z_0 = x_0+y_0 i \in D$ で $f(z)$ が微分可能であるとは

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

が存在することであった．$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とすると $z_0+\Delta z = (x_0+\Delta x)+i(y_0+\Delta y)$ より

$$\begin{aligned}
&f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\\
=&u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\}
\end{aligned}$$

である．ここで $\Delta z \to 0$ とするとき２通りの近づけ方を考える．$f(z)$ は z_0 で微分可能であるので２通りの近づけ方に対して $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ は同じ値に近づくはずである．



- $\Delta y = 0$ とすると $\Delta z = \Delta x$ であるので
$$\begin{aligned}&\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\ =&\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\\ \to& u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \quad (\Delta z = \Delta x \to 0)\end{aligned}$$
よって
$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \tag{4.2}$$
- $\Delta x = 0$ とすると $\Delta z = i\Delta y$ であるので
$$\begin{aligned}&\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\ =&\frac{u(x_0, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}\\ \to&\frac{1}{i}u_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0) \quad (\Delta z = i\Delta y \to 0)\end{aligned}$$
よって
$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0) \tag{4.3}$$
- (4.2), (4.3) より
$$u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$
これより，$u(x,y)$, $v(x,y)$ は次を満たさなければならないことがわかる：
$$\begin{cases} \boldsymbol{u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)} \\ \boldsymbol{v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)} \end{cases}$$
これを **Cauchy-Riemann の関係式**という．

- 以上まとめると次のようになる

命題 4.4

領域 D 上の関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $z_0 = x_0 + y_0 i$ で微分可能であるならば $u(x,y)$, $v(x,y)$ は (x_0, y_0) で偏微分可能であり，Cauchy-Riemann の関係式

$$\boldsymbol{u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)},$$
$$\boldsymbol{v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)}$$

を満たす．このとき

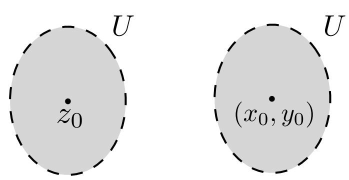
$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

を満たす．

- Cauchy-Riemann の関係式は微分可能性の必要条件である．必要十分条件を述べよう．

定理 4.5

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $z_0 = x_0 + y_0 i$ のある近傍 U で定義されている（したがって $u(x,y)$, $v(x,y)$ も (x_0, y_0) の近傍 U（同じ記号を使うことにする）で定義されている）とする．このとき $f(z)$ が z_0 で微分可能 $\Leftrightarrow$
$u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x_0, y_0) で<u>全微分可能</u>で Cauchy-Riemann の関係式を満たす．



証明は補足にて述べる．

- $u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x_0, y_0) のある近傍 U で偏微分可能であり，その偏導関数が (x_0, y_0) で連続であれば $u(x,y)$, $v(x,y)$ は (x_0, y_0) で全微分可能である．したがって次を得る．

系 4.6

$u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x_0, y_0) のある近傍で偏微分可能で，偏導関数が (x_0, y_0) で連続であるとする．さらに $u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x_0, y_0) で Caychy-Riemann の関係式を満たせば，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ で定義される関数は $z_0 = x_0 + y_0 i$ で微分可能である．

4.3　補足：定理 4.5 の証明

4.3.1　２変数関数の全微分可能性

(x_0, y_0) のある近傍で定義された 2 変数関数 $u(x, y)$ が (x_0, y_0) で**全微分可能**であるとは，ある $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \\
&\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことであった．このとき $u(x, y)$ は (x_0, y_0) で偏微分可能であり，$\alpha = u_x(x_0, y_0)$, $\beta = u_y(x_0, y_0)$ となるのであった．

4.3.2　定理 4.5 の証明

$f(z) = u(x, y) + iv(x, u)$ が $z = x_0 + y_0 i$ で微分可能であるならば u, v が Cauchy-Riemann の関係式を満たすことはすでに見た．ここでは $u(x, y)$, $v(x, y)$ が (x_0, y_0) で全微分可能であることを示そう．

- (4.1) より

  $$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \Delta z, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0$$

  が成り立つ．ここで $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i$ とおくと $\Delta z \to 0$ つまり $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ のとき ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ である．

- 上の等式を書きかえると

  $$
  \begin{aligned}
  &u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\
  &\quad = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 i)(\Delta x + i\Delta y)
  \end{aligned}
  \tag{4.4}
  $$

  となる．まず両辺の実部を見よう．Cauchy-Riemann の関係式が成り立つことはすでに見たので $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$ である．これより $f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y)$ の実部は $u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y$ であり，$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 i)(\Delta x + i\Delta y)$ の実部は $\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$ であるから (4.4) の実部は

  $$
  \begin{aligned}
  &u(x_0 + \Delta x, y + \Delta y) \\
  &\quad = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + (\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y) \\
  &\quad = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{(\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}
  \end{aligned}
  $$

  である．ここで

  $$|\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y| \le (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

であるので

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \le (|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|) \to 0$$
$$(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0 \quad \text{つまり} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0))$$

これは $u(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能であることを意味する．

- $v(x,y)$ についても同様で，(4.4) の両辺の虚部を見ればよい．そのとき Cauchy-Riemann の関係式から

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

となることに注意する．

逆に $u(x,y)$, $v(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能で Cauchy-Riemann の関係式を満たせば，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ は $z_0 = x_0 + y_0 i$ で微分可能であることを示そう．

- $u(x,y)$, $v(x,y)$ は (x_0,y_0) で全微分可能であるから，

$$\begin{aligned} &u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y_0) \\ &\quad = u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \qquad (4.5) \\ &v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ &\quad = v(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)\Delta x + v_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \qquad (4.6) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし ε_1, ε_2 は $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ つまり $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$ のとき 0 に収束するものである．

- ここで (4.5)+i(4.6) を計算し，$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i$ とおくと

$$\begin{aligned} &f(z_0+\Delta z) \\ &= f(z_0) + (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))\Delta x + (u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))\Delta y + \varepsilon|\Delta z| \end{aligned}$$

である．

- ここで Cauchy-Riemann の関係式より

$$u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) + iu_x(x_0,y_0) = i(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))$$

であるから

$$\begin{aligned} &f(z_0+\Delta z) \\ &= f(z_0) + (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))\Delta x + i(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))\Delta y + \varepsilon|\Delta z| \\ &= f(z_0) + (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon|\Delta z| \\ &= f(z_0) + (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))\Delta z + \varepsilon|\Delta z| \end{aligned}$$

- これより

$$
\begin{aligned}
&f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0))\Delta z=\varepsilon|\Delta z|,\\
&\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0))\right|=|\varepsilon|
\end{aligned}
$$

$\Delta z\to 0$ のとき $\varepsilon\to 0$ であるから $f(z)$ は z_0 で微分可能である．$\square$

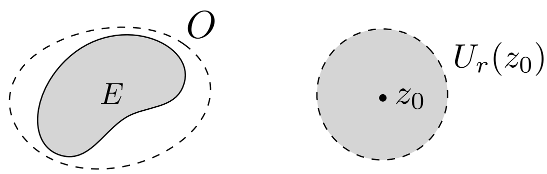
5　正則関数

5.1　正則関数

- 領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で定義された複素関数 $f(z)$ が D のすべての点で微分可能であるとき，$f(z)$ は D で**正則**であるという．

- $E(\subset \mathbb{C})$ が領域とは限らない場合，関数 $f(z)$ が E で**正則**であるとは，$E \subset O$ なるある開集合 O で $f(z)$ が定義されており，$f(z)$ が O の各点で微分可能であることである．

- 特に $f(z)$ が 1 点 z_0 で**正則**であるとは，z_0 のある r-近傍 $U_r(z_0)$ があって $f(z)$ が $U_r(z_0)$ の各点で微分可能であることをいう．



- 複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数**という．

- 領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対して，第 4 節で学んだように，D で $f(z)$ の導関数が定義される．

- $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + yi$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ とおく．

- ここで次のことを約束する：$D \subset \mathbb{C}$ に対して
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + yi \in D\}$$
も D と表す．つまり $\mathbb{C}$ の部分集合としての D をそのまま $\mathbb{R}^2$ の部分集合として同一視する．

- 系 4.6 によれば次のことがわかる．

命題 5.1

$D \subset \mathbb{C}$ を領域とする．$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ が $D \subset \mathbb{R}^2$ の各点で偏微分可能で，偏導関数が D で連続（D で C^1 級という）でかつ，D の各点で Cauchy-Riemann の関係式を満たすとする．この時 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ で定義される複素関数は D で正則である．

例 $f(z) = |z|^2 = (x^2 + y^2) + i0$ を考えると，$u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ である．

$$\begin{aligned} &u_x = 2x, v_y = 0, \\ &v_x = 0,\ -u_y = -2y \end{aligned}$$

であるので u, v は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級である．$(x, y) = (0, 0)$ で u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たすので $f(z)$ は $z = 0$ で微分可能である．しかし $(x, y) \neq (0, 0)$ において u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たさないので $f(z)$ は $z \neq 0$ で微分可能ではない．したがって $z = 0$ において $f(z)$ は微分可能であるが正則ではない．

5.2 正則関数の性質

- Cauchy-Riemann の関係式から導かれる正則関数の性質を学ぶ．その前に，２変数関数の次の性質を思い出そう．

命題 5.2

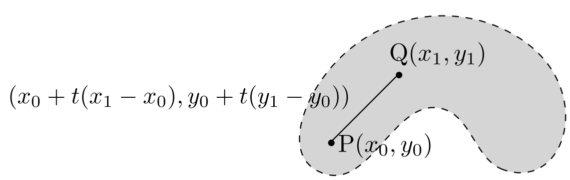
$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし，２変数関数 $u = u(x, y)$ は D で C^1 級であるとする．このとき D で

$$u_x(x, y) \equiv 0, \quad u_y(x, y) \equiv 0$$

であれば u は定数関数である．

証明

Step 1:「D の２点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$ を結ぶ線分が D に含まれるならば，$u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ が成り立つ．」



- 仮定より

$$(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \in D \quad (0 \leq t \leq 1)$$

  である．

- $\phi(t) = u(x_0 + +t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0))$ とおく．u は D で C^1 級であるので ϕ は微分可能である．

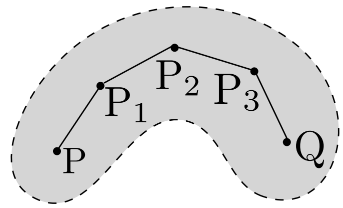
- 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= u_x(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0))(x_1 - x_0) \\ &\qquad + u_y(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0))(y_1 - y_0) \\ &= 0 \quad (0 < t < 1)\end{aligned}$$

- よって $\phi(t) \equiv \phi(0)$ $(0 \leq t \leq 1)$ が成り立つ．$t = 1$ とすれば $\phi(0) = \phi(1)$ よって $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ である．

Step 2：$\mathrm{P}(x_0, y_0) \in D$ を 1 つ選び固定する．D は領域であるので連結である．よって，任意の $\mathrm{Q}(x_1, y_1) \in D$ に対して，P と Q は D 内の折れ線で結ばれる．

- $\mathrm{P}(x_0, y_0)$, $\mathrm{P}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$, $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$ を順に結んでいく折れ線であるとする（P と Q が直接線分で結べるときは $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ はなし）．



- Step 1 より

$$
\begin{aligned}
&u(x_0, y_0) = u(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1),\ u(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = u(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2),\\
&\cdots, u(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) = u(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n),\ u(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = u(x_1, y_1)
\end{aligned}
$$

  つまり $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ が成り立つ．$(x_1, y_1) \in D$ は任意なので $u(x, y) \equiv u(x_0, y_0)$ in D つまり，u は定数関数である．□

命題 5.3

$f(z)$ が領域 D で正則で，$f'(z) \equiv 0$ であれば，$f(z)$ は定数関数である．

証明

- 命題 4.4 より $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ であるので $u_x(x, y) = v_x(x, y) \equiv 0$ が $(x, y) \in D$ に対して成り立つ．
- Cauchy-Riemann の関係式から $u_y(x, y) = -v_x(x, y) \equiv 0$, $v_y(x, y) = u_x(x, y) \equiv 0$ が $(x, y) \in D$ に対して成り立つ．
- u, v の偏導関数は恒等的に 0 であるから連続であり C^1 級である．したがって命題 5.2 より u, v は定数関数となり $f(z)$ は定数関数である．□

命題 5.4

$f(z)$ が領域 D で正則で，実数値しかとらなければ（つまり $f(D) \subset \mathbb{R}$ であれば），$f(z)$ は定数関数である．

証明

- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + yi,\ u = \mathrm{Re}f,\ v = \mathrm{Im}f)$ とおく．仮定から $v(x, y) \equiv 0$ である．したがって D において $v_x = v_y = 0$ が成り立つ．
- Cauchy-Riemann の関係式から D において

$$
u_x = v_y = 0, \quad u_y = -v_x = 0
$$

- よって命題5.2より $u(x,y)$ は定数関数である．以上より $f(z)$ は定数関数である．□

命題 5.5

$f(z)$ が領域 D で正則とする．$|f(z)|$ が定数関数であるならば $f(z)$ も定数関数である．

証明

- $|f(z)|$ を定数関数とする．
- $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ （$z = x + iy$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ は実数値関数）とおく．
- $|f(z)|^2 = u(x,u)^2 + v(x,y)^2$ なので $u^2 + v^2 = A$ （A ：定数）と仮定する．$A = 0$ ならば $u(x,y) \equiv v(x,y) \equiv 0$ であるので $f(z) \equiv 0$ となるので定数関数である．
- $A > 0$ と仮定する．$u^2 + v^2 = A$ の両辺を x, y で偏微分すると

$$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x &= 0 \\ 2uu_y + 2vvy &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} uu_x + vv_x &= 0 \\ uu_y + vv_y &= 0 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

- 今，$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 \neq 0$ がすべての (x,y) に対して成り立っているので，u, v についての連立方程式 (5.1) はすべての (x,y) に対して非自明な解をもつ．
- したがって

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \equiv 0 \tag{5.2}$$

- $f(z)$ は正則より Cauchy-Riemann の関係式

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \quad (v_y = u_x) \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

が成り立つのでこれを (5.2) に代入すると

$$u_x^2 + v_x^2 \equiv 0$$

これより

$$u_x \equiv v_x \equiv 0$$

が成り立つ．

- $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \equiv 0$ であるので $f(z)$ は定数関数である．□

5.3 調和関数

- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が領域 D で正則であるとき，u, v は 1 次の偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y の存在しか保証されていないが，後に（複素関数論 II で）$f(z)$ は D で何回でも微分可能であることが示される．そこで u, v の性質をもう少し見ていこう（ここでの結果は $f(z)$ が何回でも微分可能であることの証明より前で用いることはないので，先取りしても論理的に問題ない）．

- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が D で正則であるとき，後で述べることを先取りすると $f(z)$ は D の各点で何回でも微分可能である．特に $f'''(z)$ が各点で存在することから $f''(z)$ は D で連続である．したがって，u, v の第 2 次偏導関数は D で連続である．つまり u, v は D で C^2 級である．

- Cauchy-Riemann の関係式より

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

である．この両辺を x, y で偏微分すると

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad v_{xx} = -u_{yx}, \tag{5.3}$$

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad v_{xy} = -u_{yy} \tag{5.4}$$

- u, v は C^2 級なので偏微分の順序は交換できる．(5.3) の第 1 式と (5.4) の第 2 式より

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

つまり $u_{xx} + u_{yy} = 0$ が成り立つ．同様に (5.3) の第 2 式と (5.4) の第 1 式より

$$v_{xx} = -u_{yx} = -u_{xy} = -v_{yy}$$

つまり $v_{xx} + v_{yy} = 0$ が成り立つ．

- C^2 級の関数 $u = u(x, y)$ に対して

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

とかく．$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を**ラプラシアン**という．

- 領域 $D(\subset \mathbb{R}^2)$ で C^2 級の関数 u が $\Delta u = 0$ を満たすとき，u を**調和関数**である，または u は D で**調和**であるという．以下のことが示された．

命題 5.6

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が領域 D で正則とする．このとき $u(x,y)$, $v(x,y)$ は $D \subset \mathbb{R}^2$ で調和関数である．

例 $z = x + yi$ とすると $z^2 = (x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ である．$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ は共に調和関数である．

命題 5.7

同じ実部をもつ２つの関数 $f_1(z) = u(x,y) + iv_1(x,y)$, $f_2(z) = u(x,y) + iv_2(x,y)$ が領域 D で正則ならば，ある実数の定数 c が存在して

$$v_1(x,y) = v_2(x,y) + c \quad \text{in} \quad D(\subset \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．つまり，正則関数の実部を与えれば，虚部したがって正則関数自身も定数の差を除いて定まる．

証明

- $f_1(z)$, $f_2(z)$ は D で正則であるから $i(f_1(z) - f_2(z))$ も D で正則であり

$$i(f_1(z) - f_2(z)) = -(v_1(x,y) - v_2(x,y))$$

  である．つまり $i(f_1(z) - f_2(z))$ は実数値のみをとる正則関数である．

- したがって命題 5.4 よりそれは定数関数である．つまり $v_1(x,y) - v_2(x,y) = c$ となる実数の定数 c が存在する．□

- ２つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann の関係式

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

  を満たすとき，v は u の**共役調和関数**という．
  注 v が u の共役調和関数であっても u は v の共役調和関数とはならない．実際 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とすると

$$-if(z) = v(x,y) + i(-u(x,y))$$

  であるから v の共役調和関数は $-u$ となる．

- $F(\subset \mathbb{R}^2)$ における調和関数 $u = u(x,y)$ が与えられたとき，その共役調和関数 $v = v(x,y)$ は存在するか？という問題は重要である．

- Cauchy-Riemann の関係式より v は

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$$

を満たす．u_x, u_y は u が与えられているので既知の関数である．

- このような v を求めるのは，与えられた関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ に対して

$$F_x(x,y) = P(x,y), \quad F_y(x,y) = Q(x,y)$$

を満たす F を求める問題である．全微分方程式

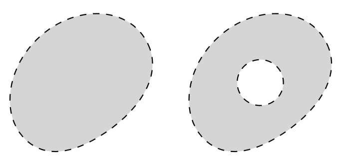
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

はこのような F を用いて $F(x,y) = C$ (C は定数) として表される．

- D が単連結（複素関数論 II で学ぶ，簡単に言えば穴の空いていない領域）のとき，このような F が存在するための必要十分条件は

$$Q_x = P_y$$

であることが（微分積分学 or ベクトル解析において）知られている．



単連結　　**単連結でない**

例題 1

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ の共役調和関数 $v(x,y)$ を求めよ．

解

- $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_{xx} = 6x$, $u_y = -6xy$, $u_{yy} = -6x$ であるので $u_{xx} + u_{yy} = 0$ つまり u は調和関数である．

- u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たすので

$$v_x = -u_y = 6xy, \tag{5.5}$$
$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 \tag{5.6}$$

- (5.5) の両辺を x で積分すると

$$v(x,y) = \int 6xy dx = 3x^2 y + \phi(y)$$

ここで $\phi(y)$ は x についての積分に関する積分定数（y のみの関数）である．

- $v_y = 3x^2 + \phi'(y)$ であるので (5.6) に代入すると

  $\phi'(y) = -3y^2$　したがって　$\phi(y) = -y^3 + c$　(c は任意定数 (x にも依存しない))

- 以上より $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + c$ である.

6　初等関数

6.1　多項式・有理関数

- n を 0 以上の整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ を定数とするとき
$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$
（$n = 0$ のときは $a_0 = 0$ でもよい）を $\boldsymbol{n}$ **次多項式**という．n 次多項式 $P(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．このとき，導関数の定義と性質（命題 4.2）より
$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$
が成り立つ．

- $P(z), Q(z)$ が多項式（$Q(z) \not\equiv 0$）のとき
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m} \quad (b_0 \neq 0)$$
を**有理関数**という．$m = 0$ のときは多項式となるので多項式も有理関数である．有理関数は $\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$ で正則である．

6.2　指数関数

- $z \in \mathbb{C}$ に対して e^z を定義しよう．まず，$x \in \mathbb{R}$ の場合，指数関数 e^x の Maclaurin 展開
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{6.1}$$
を思い出そう．

- 右辺の級数の x に $x = i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を代入して得られる級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \tag{6.2}$$
において
$$\left| \frac{(i\theta)^n}{n!} \right| = \frac{|i\theta|^n}{n!} = \frac{|\theta|^n}{n!}$$
であり．級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\theta|^n}{n!}$ は収束する（$|\theta|$ は実数であり，(6.1) は任意の実数 x に対して収束することに注意）．つまり，(6.2) は絶対収束する．命題 2.8 より (6.2) は

収束する．ここで

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(i\theta)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}+i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\theta^{2k+1}$$

であるので $n\to\infty$ のとき右辺は $\cos\theta+i\sin\theta$ に収束する．したがって

$$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

と定義する．これを **Euler の公式**という．Euler の公式を用いれば複素数 z の極形式は z の絶対値 r と偏角 θ を用いて

$$\boldsymbol{z=re^{i\theta}}$$

と表される．

- 一般の $z\in\mathbb{C}$ に対して e^z を級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{6.3}$$

の和として定義すればよいが，指数関数の**指数法則**

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$$

はこの級数による定義に基づいて証明しなければならない．それについては補足で述べることにし，$z=x+yi$ $(x,\,y\in\mathbb{R})$ に対して e^z を次で定義する：

$$\boldsymbol{e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=(e^x\cos y)+i(e^x\sin y)}$$

命題 6.1

$z_1,\,z_2\in\mathbb{C}$ に対して $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ が成り立つ．

証明 $z_1=x_1+y_1i,\,z_2=x_2+y_2i$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
&e^{z_1}e^{z_2}\\
=&\{e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\}\{e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)\}\\
=&e^{x_1}e^{x_2}\{(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)\}+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)\}\\
=&e^{x_1+x_2}\{(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)\}+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)\}\\
=&e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\}\\
=&e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

（$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ に注意）□

- $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ $(z = x + yi)$ より

$$|e^z| = e^x, \quad y = \arg e^z$$

であることがわかる．

命題 6.2

e^z は $\mathbb{C}$ で正則で $(e^z)' = e^z$ が成り立つ．

証明

- $z = x + yi$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ に対して

$$e^z = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

であるので $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ とおく．

- u, v は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級（偏導関数が存在し，連続）であり，かつ

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad v_x = e^x \sin y = -u_y$$

より u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たす．したがって e^z は $\mathbb{C}$ で正則である．さらに

$$e^z = u_x + iv_x = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y) = e^z$$

である．□

- もう 1 つ指数関数の性質を述べよう．

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{6.4}$$

が成り立つ．一般に関数 $f(z)$ はある $\omega \in \mathbb{C}$ が存在して

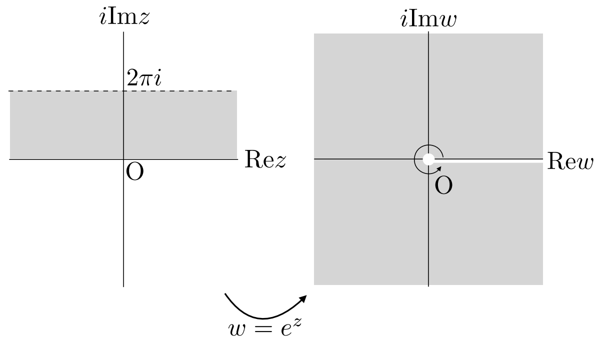
$$f(z + \omega) = f(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

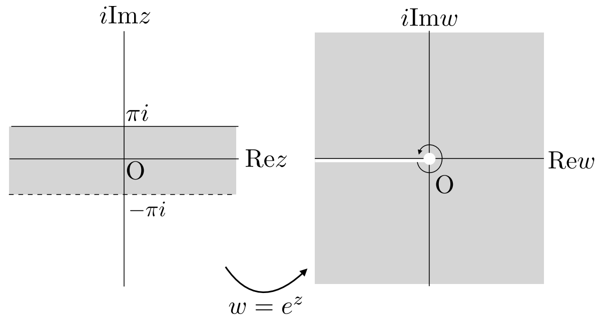
が成り立つとき，$f(z)$ は**周期関数**であるといい，ω を**周期**という．指数関数 e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数である．

- また，$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ $(z = x + yi)$ であり，$|e^z| = e^x > 0$, $\arg e^z = y$ であるので，指数関数 e^z $(z \in \mathbb{C})$ の値域は $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ である．

- $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im} z < 2\pi\}$ とすると E において e^z は 0 以外の任意の複素数をちょうど 1 回とる．

- $E = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im} z \leq \pi\}$ としても同様である．





6.3　三角関数

- Euler の公式
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$
より $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ である．これを用いると
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
である．$z \in \mathbb{C}$ に対しても，この式を用いて三角関数を定義する：
$$\boldsymbol{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}}$$
- $f(z) = e^z$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので，合成関数の微分法（命題 4.3）より e^{iz}, e^{-iz} は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．したがって $\cos z, \sin z$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．また $\tan z$ は $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\}$ で正則である．また
$$\frac{d}{dz}e^{iz} = ie^{iz}, \quad \frac{d}{dz}e^{-iz} = -ie^{-iz}$$
より
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\cos z &= \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z, \\
\frac{d}{dz}\sin z &= \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \\
\frac{d}{dz}\tan z &= \frac{(\sin z)'\cos z - \sin z(\cos z)'}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

- 実数変数の場合の三角関数の次のような公式はそのまま複素変数でも成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \\
&\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z, \\
&\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\
&\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2
\end{aligned}
$$

さらに $z = x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi \\
\cos z &= \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\cos yi &= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \mathrm{cosh} y, \\
\sin yi = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} &= -i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = i \mathrm{sinh} y
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\
\cos z &= \cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 \\
&= \sin^2 x \left(\frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}\right) + \cos^2 x \left(\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4}\right) \\
&= \sin^2 x \left(\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} + 1\right) + \cos^2 x \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} \\
&= \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x) \left(\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4}\right) \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y
\end{aligned}
$$

同様にして $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ である. $\displaystyle\lim_{y \to \infty} \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \infty$ より $\sin z$, $\cos z$ は有界ではない（実軸上では $|\sin z|, |\cos z| \leq 1$ である）.

6.4　対数関数

- 指数関数 e^z $(z \in \mathbb{C})$ の値域は $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ であることは先に学んだ.

- $z \neq 0$ に対し，$e^w = z$ を満たす w を $\boldsymbol{\log z}$ と表す：

$$w = \log z \quad :\Leftrightarrow \quad e^w = z$$

- $e^w = z$ ならば指数関数の周期性により，任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$e^{w+2k\pi i} = z$$

であるので $\log z$ は一つには定まらない．もう少し見ていこう．

- $z \neq 0$ とすると $z = re^{i\theta}$ を満たす $r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ となる r と θ が一通りに定まる．このとき $w = u + vi$ $(u,\ v:$ 実数$)$ とおくと $e^w = z$ は

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

となる．両辺の絶対値をとると $|e^{vi}| = |e^{i\theta}| = 1$ より

$$e^u = r$$

を得る．$r > 0$ より $u = \log r$（正の実数に対するいままで通りの自然対数）である．これから残りは

$$e^{vi} = e^{\theta i}, \quad e^{(v-\theta)i} = 1$$

であるから

$$v = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である．以上まとめておこう．

$z = re^{i\theta}$ $(r \neq 0)$ のとき

$$\boldsymbol{\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

特に

$$\boldsymbol{\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})}$$
$$(\boldsymbol{\log z = \log|z| + i\arg z \quad (k \in \mathbb{Z})})$$

$(\arg z$ を偏角全体と考えるときは下$)$

- $\log z$ は $z \neq 0$ を一つ定めると無限個の値が定まるという意味でいままで考えてきた関数ではない．z の値を 1 つ決めたとき，2 つ以上の値を一斉に対応づける対応を**多価関数**という．特に $\log z$ は z に対して無限個の数が対応するので**無限多価関数**という．

- 一方，$\log z$ の値域を $\{z\in\mathbb{C}\mid -\pi<\mathrm{Im}z\le\pi\}$ あるいは $\{z\in\mathbb{C}\mid 0\le\mathrm{Im}z<2\pi\}$ と制限したものを対数関数 $\log z$ の**主値**といい $\mathbf{Log}\boldsymbol{z}$ とかく．同様な考えで $\arg z$ の主値も $\mathbf{Arg}\boldsymbol{z}$ と書かれる．

$$\mathbf{Log}\boldsymbol{z}=\mathbf{log}\,|\boldsymbol{z}|+\boldsymbol{i}\mathbf{Arg}\boldsymbol{z}\quad(-\pi<\mathrm{Arg}z\le\pi,\quad 0\le\mathrm{Arg}z<2\pi)$$

- 正の実数 r に対する従来の自然対数は $\mathrm{Log}z$ であるので

$$\log z=\mathrm{Log}|z|+i\arg z,\quad \mathrm{Log}z=\mathrm{Log}|z|+i\mathrm{Arg}z$$

と書いてもよい．

- 対数関数の定義により，$e^{\log z}=z$ が（両辺が表す数の集合として）成り立つ．

- 一方 $z=x+yi$ とすると

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\quad |e^z|=e^x,\quad e^z \text{ の偏角は } y+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

だから

$$\begin{aligned}\log e^z&=\log e^x+i(y+2k\pi)\\&=x+i(y+2k\pi)=z+2k\pi i\quad(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

である．

- $z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$, $z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$ $(z_1,\ z_2\ne 0,\ 0\le\theta_1,\theta_2<2\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}\log z_1&=\log|z_1|+i(\theta_1+2k\pi)\quad k\in\mathbb{Z},\\ \log z_2&=\log|z_2|+i(\theta_2+2k\pi)\quad l\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\log z_1+\log z_2&=\log|z_1|+\log|z_2|+i(\theta_1+\theta_2+2(k+l)\pi)\\&=\log|z_1z_2|+i(\theta_1+\theta_2+2(k+l)\pi)\end{aligned}$$

k,l はすべての整数を動き回るので $k+l$ もすべての整数を動く．よって

$$\log z_1+\log z_2=\log|z_1z_2|+i(\theta_1+\theta_2+2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

である．

- 一方，$z_1z_2=|z_1z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ であるので

$$\log z_1z_2=\log|z_1z_2|+i(\theta_1+\theta_2+2m\pi)\quad(m\in\mathbb{Z})$$

したがって**両辺の表す数全体の集合として**

$$\mathbf{log}(\boldsymbol{z_1z_2})=\mathbf{log}\,\boldsymbol{z_1}+\mathbf{log}\,\boldsymbol{z_2}$$

が成り立つ．

- 同様に両辺の表す数全体の集合として

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$$

が成り立つ．

- 一方，$z \neq 0$ とすると $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ となる r と θ が定まるが，$z^2 = r^2 e^{i(2\theta)}$ より

$$\log z^2 = \log r^2 + i(2\theta + 2k\pi) = 2\log r + i(2\theta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である．

- 一方

$$2\log z = 2\{\log r + i(\theta + 2l\pi)\} = 2\log r + i(2\theta + 4l\pi) \quad l \in \mathbb{Z}$$

であり，$2\log z$ の表す複素数は $\log z^2$ の表す複素数の一部となってしまう．したがって

$$\log z^m = m \log z$$

は両者が表す数全体の集合として一致しない．

- 対数関数の正則性を述べよう．$-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi$ とする $\log z$ の主値

$$\mathrm{Log} z = \log |z| + i \mathrm{Arg} z$$

を考える．

命題 6.3

$\mathrm{Log} z$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ \arg z \in (-\pi, \pi)\}$ で正則で

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z}$$

が成り立つ．

証明

- $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ -\pi < \arg z \leq \pi\}$ の任意の z に対してその点で $\mathrm{Log} z$ が微分可能であることを示す．そのためには $f(z) = \mathrm{Log} z = u(x, y) + iv(x, y)$ としたときの $u,\ v$ を求める必要がある．

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) \quad \text{正の実数に対する自然対数であることに注意}$$

- 問題は $v(x, y)$ であるが，$\arg z$ は場合分けが必要である：

- $\circ$ $\arg z \in (-\pi, 0)$ のとき $\arg z = -\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ ($y < 0$ に注意)
- $\circ$ $\arg z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき $\arg z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
- $\circ$ $\arg z \in (0, \pi)$ のとき $\arg z = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- これで $-\pi < \arg z < \pi$ ならば $\arg z$ は x と y の式で表される．

- $\arg z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ の場合について u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たすことを示そう．他の場合は演習問題とする．

- $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $v(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ であり

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, \\
u_y &= \frac{y}{x^2+y^2}, \\
v_x &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \\
v_y &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},
\end{aligned}
$$

- $\arg z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ より $z = x + yi$ において $x \neq 0$ である．よって u, v は (x,y) の周りで偏微分可能であり偏導関数は上の計算より連続である．さらに Cauchy-Riemann の関係式（$u_x = v_y$, $v_x = -u_y$）を満たしている．

- 以上より $z \neq 0$, $\arg z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ならば $f(z) = \mathrm{Log} z$ は z で微分可能である．

- また

$$
\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = u_x + iv_x = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}
$$

を得る．$\square$

6.5 累乗根・複素累乗

- $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ のとき z^α を定義しよう．$\alpha = n$ ($n \in \mathbb{N}$) のときはすでに定義されている．

- $\alpha = \dfrac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) の場合について考える．

- $z^{\frac{1}{n}}$ は $w^n = z$ となる $w \in \mathbb{C}$ として定義される．
- $z = 1$ の場合をまず考えよう．$z \neq 0$ より $w \neq 0$ であるから $w = \rho e^{i\phi}$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ とする．$w^n = 1$ より $\rho^n e^{in\phi} = 1$ である．両辺の絶対値をとると $\rho^n = 1$ であるから $\rho = 1$ となる．これより

$$\begin{aligned} &e^{in\phi} = 1 \\ &n\phi = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\phi = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

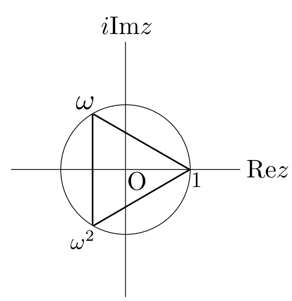
  を得る．$0 \leq \phi < 2\pi$ より $k = 0, 1, \cdots, n-1$ となる．よって求める w は

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

  である．これを **1 の n 乗根**という．
- $e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ を ω とおくと de Moivre の定理（命題1.5）より，1 の n 乗根は

$$1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$$

  と表される．
- 1 の n 乗根は複素数平面において 1 を 1 つの頂点とする単位円に内接する正 n 角形の頂点と一致する．



- $z \neq 1$ の場合も同様に考えて $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ のとき

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

  となる．
- $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ は多価関数で，特に **n 価関数**である．

- $z \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{C}$ のとき z^α を次のように定める：

$$\boldsymbol{z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}}$$

$\log z$ は多価関数であるので，z^α も一般には多価である．

- $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ のとき，$z \neq 0$ とすると $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ となる r, θ がただ 1 組定まる．このとき上で定義した $z^\alpha = z^n$ は

$$\begin{aligned} e^{n\log z} &= e^{n(\log r + i(\theta + 2k\pi))} \\ &= e^{\log r^n} e^{in\theta} e^{2nk\pi i} = e^{\log r^n} e^{in\theta} = r^n e^{in\theta} = (re^{i\theta})^n = z^n \quad \text{（普通の } n \text{ 乗）} \end{aligned}$$

したがって通常の n 乗と一致する．つまり z^n $(n \in \mathbb{Z})$ は 1 価である．

- $\alpha = \dfrac{m}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z})$, $z \neq 0$ とすると $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ となる r, θ がただ 1 組定まる．このとき

$$z^\alpha = z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z} = e^{\frac{m}{n}(\log r + i(\theta + 2k\pi))} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である．

- しかし $k \neq 0, 1, \cdots, n-1$ の場合

$$\frac{2k\pi}{n} = 2l\pi + \frac{2j}{n}\pi \quad (j = 0, 1, \cdots, n-1,\ l \in \mathbb{Z})$$

とかけるので，指数関数の周期性より

$$e^{\frac{m}{n}(\log r + i(\theta + 2k\pi))} = \left(e^{\frac{1}{n}\log r + i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)}\right)^m = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)^m$$

の表す複素数は $k = 0, 1, \cdots, n-1$ の場合で尽くされる．したがって

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

が成り立つ．

- $\alpha = \dfrac{m}{n} \Rightarrow z^\alpha = z^{\frac{m}{n}}$ は n 価である．

例題 1

次の値を求めよ．

(1) $\log(1+i)$

(2) $\mathrm{Log}(-1+\sqrt{3}i)$

(3) i^i

ただし $\mathrm{Log} z$ は $\arg z$ を $-\pi < \arg z < \pi$ に制限する $\log z$ の主値である．

解

(1) $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ より

$$\log(1+i)=\boldsymbol{\log\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\quad \boldsymbol{(k\in\mathbb{Z})}$$

(2) $|-1+\sqrt{3}i|=2$, $\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{3}i)=-\dfrac{2}{3}\pi$ より

$$\mathrm{Log}(-1+\sqrt{3}i)=\boldsymbol{\log 2-\frac{2}{3}\pi i}$$

(3)

$$i^i=e^{i\log i}=e^{i\left(\log 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}=\boldsymbol{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}\quad \boldsymbol{(k\in\mathbb{Z})}$$

6.6　補足

- ここでは

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

とおくと，指数法則 $g(z_1+z_2)=g(z_1)g(z_2)$ が成り立つことを証明する．特にこの級数はすべての $z\in\mathbb{C}$ に対して絶対収束することに注意する．

命題 6.4

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z_n,\ \sum_{n=0}^{\infty}w_n$ がともに絶対収束し

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}z_n,\quad W=\sum_{n=0}^{\infty}w_n$$

とする．このとき

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}z_kw_{n-k}$$

で定義される級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ も絶対収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n=ZW$$

が成り立つ．

証明

- まず次のことに注意する．

$$\begin{aligned}
&(|z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|)(|w_0| + |w_1| + \cdots + |w_n|) \\
=&|z_0||w_0| + (|z_0||w_1| + |z_1||w_0|) + \cdots + (|z_0||w_n| + \cdots + |z_n||w_n|) \\
=&\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}|z_l||w_{k-l}|\right)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}|y_k| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}|z_l||w_{k-l}|\right) &\leq \left(\sum_{k=0}^{n}|z_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{n}|w_k|\right) \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}|w_m|\right)
\end{aligned}$$

- したがって $S_n = \sum_{k=0}^{n}|y_k|$ とおくと実数列 $\{S_n\}$ は上に有界である．また $\{S_n\}$ は明らかに単調増加であるので（$|y_k| \geq 0$ に注意）$\{S_n\}$ つまり級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|y_n|$ は収束する．命題 2.8 より $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ も収束する．

- ここで (6.5) と全く同様に

$$\sum_{k=0}^{n}y_k = \left(\sum_{l=0}^{n}z_l\right)\left(\sum_{j=0}^{n}w_j\right)$$

が成り立つことがわかるから，$n \to \infty$ として結果を得る．□

指数法則の証明

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ は絶対収束することに注意する．

- 次に

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^k w^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}{}_n\mathrm{C}_k z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

したがって命題 6.4 より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{w^m}{m!}\right)$$

が成り立つ．□

7　複素積分

7.1　複素数平面上の曲線

- $\mathbb{R}^2$（xy 平面上）の（連続）曲線は２つの実数値連続関数 $x(t), y(t)$ を用いて

$$C : x = x(t),\ y = y(t)\ \ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

と表され，これを C の媒介変数（パラメータ）表示といった．

- $\mathbb{C}$（複素数平面）においても同様である．２つの実数値連続関数 $x(t), y(t)$ を用い

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)\ \ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

とおくとき $\mathbb{C}$ の部分集合

$$\{z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

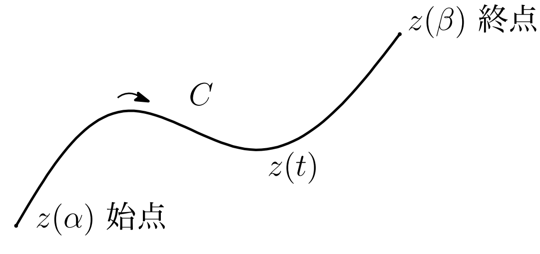
を**曲線**といい

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t)\quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

と表す．

- $z(\alpha)$ を曲線 C の**始点**，$z(\beta)$ を C の**終点**という．曲線にはパラメータ t の増加に伴う曲線上の点 $z(t)$ の動きにあわせた**向き**をあわせもつものとする（ただの $\mathbb{C}$ の部分集合ではない）．

- 自分自身と交わらない曲線を**単純曲線**という．



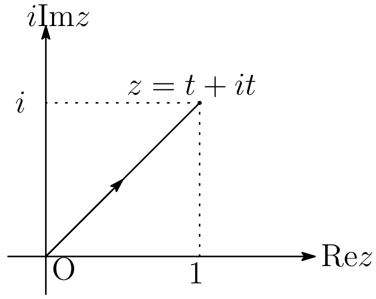
$\boxed{\textbf{例}}$

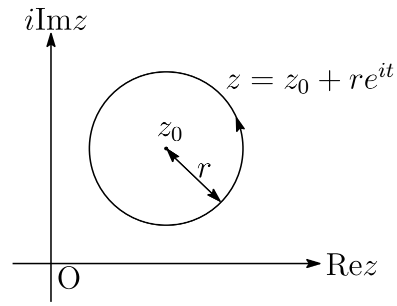
(1) 原点 O と P $(1+i)$ を結ぶ線分（向きは O→ P）は

$$z = z(t) = t + it\ \ (0 \leq t \leq 1)$$

(2) 中心 z_0，半径 r の円は

$$z = z(t) = z_0 + re^{it}\ \ (0 \leq t \leq 2\pi)$$





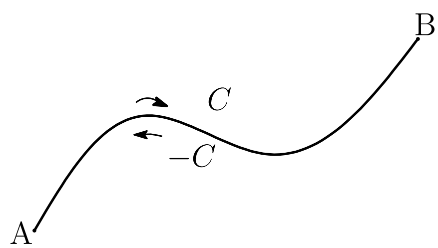
- 曲線 $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ に対して

$$\tilde{z}(t) = z(\alpha + \beta - t) \ \ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

とし，$\tilde{C} : z = \tilde{z}(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ とする．このとき

$$\{z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\} = \{\tilde{z}(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

であり，$\tilde{C}$ は C の終点 $z(\beta)$ から C の始点 $z(\alpha)$ に至る曲線である．この曲線を C の**逆向きの曲線**といい $\boldsymbol{-C}$ と表す．



滑らかな曲線

- $x(t)$, $y(t)$ が $[\alpha, \beta]$ の各点で微分可能で（$t = \alpha$, β では片側微分を考える）$x'(t)$, $y'(t)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続である（$x(t)$, $y(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で C^1 級であるという）とする．さらに $z(t) = x(t) + iy(t)$ とおくとき

$$z'(t) := x'(t) + iy'(t) \neq 0 \ \ ({}^\forall t \in [\alpha, \beta])$$

が成り立つとき，曲線 $C : z = z(t)$ は**滑らかな曲線**であるという．

- $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ が滑らかな曲線であるとき $\mathbb{R}^2$ の曲線と同様にして

$$\int_\alpha^\beta |z'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

を曲線 C の**長さ**という．

区分的に滑らかな曲線

- 曲線 C_1 の終点と曲線 C_2 の始点が一致するとき，これらをつなぎ合わせた曲線を $\boldsymbol{C_1 + C_2}$ と表す．

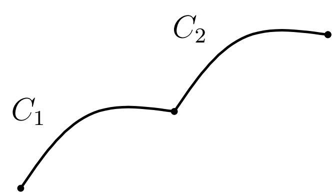
- C_1, C_2 が

$$C_1 : z = z_1(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$
$$C_2 : z = z_2(t) \quad (\gamma \le t \le \delta)$$

で $z_1(\beta) = z_2(\gamma)$ であるとき

$$C_1 + C_2 : z = \begin{cases} z_1(t), & (\alpha \le t \le \beta), \\ z_2(t + \gamma - \beta), & (\beta \le t \le \beta + (\delta - \gamma) \end{cases}$$

である．



- $C : z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ に対し，ある $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$ なる t_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ が存在して

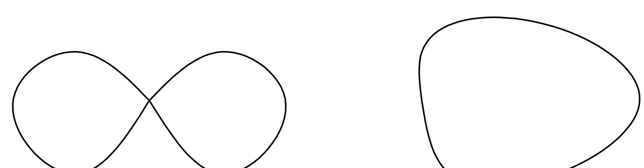
$$C_i : z = z(t) \quad (t_{i-1} \le t \le t_i)$$

が滑らかな曲線となるとき C は**区分的に滑らか**という．

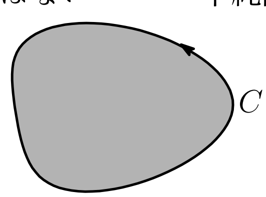
閉曲線

- 曲線 $C : z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ において $z(\alpha) = z(\beta)$ であるとき，C は**閉曲線**という．また，$\alpha \le t_1 < r_2 < \beta$ なる t_1, t_2 に対していつも $z(t_1) \ne z(t_2)$ が成り立つ（つまり自己交差をもたない）閉曲線を**単純閉曲線（Jordan 閉曲線）**という．

- Jordan の曲線定理によれば平面上に単純閉曲線を 1 つとると，平面は C の「内部」と「外部」と曲線 C 上の点に分けられる（証明は難しい）．$\mathbb{C}$ の単純閉曲線 C に対し，内部を左手に見ながら進む向きを**正の向き**と定める．以後，特に断りがなければ $\mathbb{C}$ の単純閉曲線には正の向きとなるようにパラメータが定められているものとする．



単純閉曲線ではない　　単純閉曲線である



単純閉曲線の正の向き

7.2　実数変数の複素数値関数についてのまとめ

- 複素積分を定義する前に，実変数複素数値関数

$$F(t) = U(t) + iV(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

　の微分・積分についてまとめよう.

- 曲線のところで既に述べたが，$U(t)$, $V(t)$ が各 $t \in (\alpha, \beta)$ で微分可能であるとき

$$F'(t) = U'(t) + iV'(t)$$

　と定義する.

- 次に，$U(t)$, $V(t)$ が閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続であるとき

$$\int_\alpha^\beta F(t)dt = \int_\alpha^\beta U(t)dt + i\int_\alpha^\beta V(t)dt$$

　と定義する.

- 定義より

$$\mathrm{Re}\int_\alpha^\beta F(t)dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,F(t)dt \tag{7.1}$$

　が成り立つ.

- また，$c \in \mathbb{C}$ (定数) に対しても

$$c\int_\alpha^\beta F(t)dt = \int_\alpha^\beta cF(t)dt \tag{7.2}$$

　が成り立つ（証明は各自 check されたい）.

命題 7.1

$U(t)$, $V(t)$ を $[\alpha, \beta]$ で連続な実数値関数とする．このとき $F(t) = U(t) + iV(t)$ とおくと

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |F(t)|dt$$

が成り立つ.

証明

- $J = \displaystyle\int_\alpha^\beta F(t)dt$ とおく．$J = 0$ なら不等式は明らかであるので $J \neq 0$ とする.

- $J = |J|e^{i\phi}$ とおくと $e^{-i\phi}J = |J|$ である．(7.2) と (7.1) より $|J| = e^{-i\phi}J$ は実数であることに注意して

$$\begin{aligned}|J| = \mathrm{Re}\, e^{-i\phi}J &= \mathrm{Re}\left[e^{-i\phi}\int_\alpha^\beta F(t)dt\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\int_\alpha^\beta e^{-i\phi}F(t)dt\right] \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}[e^{-i\phi}F(t)]dt \\ &\le \int_\alpha^\beta |e^{-i\phi}F(t)|dt = \int_\alpha^\beta |F(t)|dt\end{aligned}$$

を得る．ここで $\mathrm{Re}z \le |z|$ を使った．□

7.3 複素積分の定義

- $C : z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ は滑らかな曲線とし，複素関数 $f(z)$ は C 上で連続であるとする（実際には $f(z(t))$ が t の関数として $[\alpha, \beta]$ で連続であればよい）．このとき $f(z)$ の曲線 C に沿う**（複素）積分**を

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(z(t))\frac{dz}{dt}dt}$$

で定義し

$$\boldsymbol{\int_C f(z)dz}$$

で表す．C をこの複素積分の**積分路**という．

- $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ は滑らかな曲線，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は C で連続とする．このとき

$$\begin{aligned}f(z(t)) &= u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)), \\ f(z(t))z'(t) &= \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\}\{x'(t) + iy'(t)\} \\ &= (ux' - vy') + i(vx' + uy')\end{aligned}$$

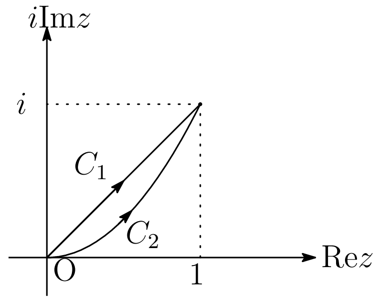
となるので

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left\{u(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right\}dt \\ &\quad + i\int_\alpha^\beta \left\{v(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right\}dt\end{aligned} \tag{7.3}$$

となる．後で見るように $\int_C f(z)dz$ は C のパラメータ表示に依らないことが示される．同様に 2 変数関数 $u(x,y)$ に対して積分 $\int_\alpha^\beta u(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}dt$ なども $\mathbb{R}^2$ の曲線としてのパラメータ表示 $x=x(t)$, $y=y(t)$ に依存しないので $\int_C udx$ とかかれる（この場合 C は $\mathbb{R}^2$ の曲線としてである）．

例題 1

$C_1 : z = t+it$ $(0 \leq t \leq 1)$, $C_2 := t+it^2$ $(0 \leq t \leq 1)$ とする．



このとき

(1) $\int_{C_1} zdz$ (2) $\int_{C_2} zdz$ (3) $\int_{C_1} \overline{z}dz$ (4) $\int_{C_2} \overline{z}dz$

を求めよ．

解

- $f(z)=z$ とおくと $f(z)=x+iy$, $g(z)=\overline{z}$ とおくと $g(z)=x-iy$ である．
- $z_1(t)=t+it$, $z_2(t)=t+it^2$ とおく．

(1) $f(z_1(t))=t+it$, $z_1'(t)=1+i$ であるので $f(z_1(t))z_1'(t)=2it=i(2t)$ である．したがって

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 f(z_1(t))z_1'(t)dt = i\int_0^1 2tdt = i[t^2]_0^1 = i$$

(2) $f(z_2(t))=t+it^2$, $z_2'(t)=1+2it$ であるので

$$f(z_2(t))z_2'(t) = (t+it^2)(1+2it) = (t-2t^3)+i(3t^2)$$

したがって

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 f(z_2(t))z_2'(t)dt = \int_0^1 (t-2t^3)dt + i\int_0^1 3t^2 dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 + i[t^3]_0^1 = i$$

(3) $g(z_1(t)) = t - it$, $z_1'(t) = 1+i$ であるので $g(z_1(t))z_1'(t) = 2t$ である．したがって

$$\int_{C_1} g(z)dz = \int_0^1 g(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_0^1 2tdt = [t^2]_0^1 = 1$$

(4) $g(z_2(t)) = t - it^2$, $z_2'(t) = 1 + 2it$ であるので

$$g(z_2(t))z_2'(t) = (t - it^2)(1+2it) = (t+2t^3) + i(t^2)$$

したがって

$$\int_{C_2} g(z)dz = \int_0^1 g(z_2(t))z_2'(t)dt = \int_0^1 (t+2t^3)dt + i\int_0^1 t^2 dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 + i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3}i$$

例題２

C を a を中心とする半径 r の円，m を整数とするとき

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^m}dz = \begin{cases} 0 & (m \neq 1) \\ 2\pi i & (m = 1) \end{cases}$$

を証明せよ（C は単純閉曲線なので向きは反時計回りとする）．

証明

- $C : z = a + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とおける．

$$\frac{dz}{dt} = ire^{it}$$

であるから

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^m}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it})^m} \cdot ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} ir^{1-m}e^{i(1-m)t}dt$$
$$= ir^{1-m}\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt$$

- $m \neq 1$ のとき

$$与式 = ir^{1-m}\left[\frac{1}{i(1-m)}e^{i(1-m)t}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$((e^{ikt})' = ike^{ikt}$ に注意)

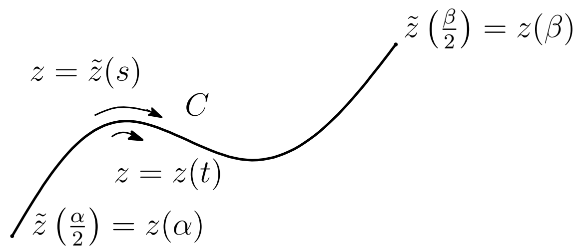
- $m = 1$ のとき，与式 $= i\displaystyle\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi i$

7.4 複素積分の性質

- 滑らかな曲線 $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ に対して，パラメータを $t = 2s$ ととりかえ

$$\tilde{z}(s) = z(2s) \quad \left(\frac{1}{2}\alpha \leq s \leq \frac{1}{2}\beta\right)$$

とすると $z = \tilde{z}(s)$ も（向きを込めて）C と同じ曲線を表す．



- $\tilde{z}'(s) = 2z'(2s)$ よりパラメータ表示として $z = \tilde{z}(s)$ を用いると

$$\int_{\alpha/2}^{\beta/2} f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s)ds = \int_{\alpha/2}^{\beta/2} f(z(2s))2z'(2s)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

となる，最後の等式で $t = 2s$ と置換積分した．したがって C のパラメータ表示として

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$
$$z = \tilde{z}(s) = z(2s) \quad \left(\frac{1}{2}\alpha \leq s \leq \frac{1}{2}\beta\right)$$

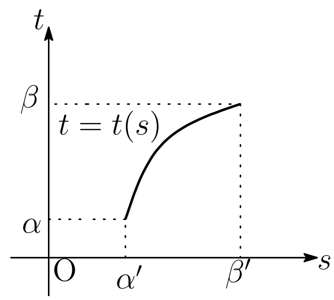
をどちらを用いても複素積分の計算結果は変わらない．一般に次が成り立つ．

命題 7.2

$C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ を滑らかな曲線とし，$f(z)$ は C の各点で連続とする．また，$t = t(s)$ は $[\alpha', \beta']$ で C^1 級で $\dfrac{dt}{ds} > 0$ $(\alpha' \leq s \leq \beta')$ とする．さらに $\alpha = t(\alpha')$, $\beta = t(\beta')$ とする．このとき $\tilde{z}(s) = z(t(s))$ とおくと

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

が成り立つ．



証明 $\tilde{z}(s) = z(t(s))$ より $\tilde{z}'(s) = z'(t(s))t'(s)$ であるから

$$\text{左辺} = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(z(t(s)))z'(t(s))t'(s)ds$$

この積分で $t = t(s)$ とおくと $dt = t'(s)ds$ であり $s : \alpha' \to \beta'$ は $t : \alpha \to \beta$ となるので

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(z(t(s)))z'(t(s))t'(s)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt = \text{右辺} \quad \square$$

- したがって複素積分の値は曲線の軌跡

$$\{z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

  と向きのみによって定まり，曲線のパラメータ表示に依らない．

- 以後，曲線は区分的に滑らかで，複素積分に現れる関数 $f(z), \cdots$ は積分路上の各点で連続とする．

命題 7.3

次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

(2) $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

証明

- (2) のみを示す. C が滑らかな場合について示せば十分である.
- $C : z = z(t)\ (\alpha \leq t \leq \beta)$ とすると

$$-C : z = z(\alpha + \beta - t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

である. ここで $\tilde{z}(t) = z(\alpha + \beta - t)$ とおくと

$$\tilde{z}'(t) = -z'(\alpha + \beta - t)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-C} f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(\tilde{z}(t))\tilde{z}'(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta f(z(\alpha + \beta - t))\{-z'(\alpha + \beta - t)\}dt \\
&= \int_\beta^\alpha f(z(s))z'(s)ds \quad (s = \alpha + \beta - t \text{ とおいた.}) \\
&= -\int_\alpha^\beta f(z(s))z'(s)ds = -\int_C f(z)dz
\end{aligned}$$

したがって成り立つ. □

次の命題は複素積分の値を評価するために重要な不等式である.

命題 7.4（複素積分の評価式）

C 上で $|f(z)| \leq M$ （M は定数）が成り立つならば

$$\left| \int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{f(z)dz} \right| \leq \boldsymbol{ML}$$

が成り立つ. ただし, L は C の長さである.

証明

- C が滑らかな場合について示せば十分である.

- $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ とすると

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

- 命題 7.1 と $|f(z)| \leq M$ (on C) より

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt\right| \\ &\leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))||z'(t)|dt \\ &\leq \int_\alpha^\beta M|z'(t)|dt = M\int_\alpha^\beta |z'(t)|dt = ML\end{aligned}$$

したがって成り立つ．□

8 Cauchy の積分定理

8.1 原始関数

- 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で連続な関数 $f(z)$ に対し
$$F'(z) = f(z) \quad (z \in D)$$
を満たす D で（1 価）正則な関数 $F(z)$ が存在するとき $F(z)$ を $f(z)$ の**原始関数**という．

命題 8.1

領域 $D \subset \mathbb{C}$ で連続な関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ をもつとする．このとき $a, b \in D$ を結ぶ D 内の任意の区分的に滑らかな曲線 C に対して
$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$
が成り立つ．つまり，複素積分の値は曲線の始点と終点のみによって定まる．

証明

- C は滑らかであるとして証明すれば十分である．
- $f(z)$ は領域 D で連続で，D で一価正則な F があって $F'(z) = f(z)$ が D で成り立っているとする．
- $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ とすると
$$F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y)$$
であり，かつ U, V は Cauchy-Riemann の関係式
$$U_x = V_y, \quad V_x = -U_y$$
を満たす．また，$F'(z) = f(z)$ は仮定から連続であるので U, V の偏導関数は連続であることに注意する．
- $C : z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ は a と b を結ぶ滑らかな曲線で $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$ とする．
- このとき
$$\begin{aligned}
f(z(t))z'(t) = F'(z(t))z'(t) &= \{U_x(x(t), y(t)) + iV_x(x(t), y(t))\}\{x'(t) + iy'(t)\} \\
&= (U_x x' \underline{-V_x} y') + i(V_x x' + \underline{U_x} y') \\
&= (U_x x' + \underline{U_y} y') + i(V_x x' + \underline{V_y} y') \quad \text{(Cauchy-Riemann)} \\
&= \{U_x(x(t), y(t))x'(t) + U_y(x(t), y(t))y'(t)\} \\
&\qquad + i\{V_x(x(t), y(t)) + V_y(x(t), y(t))y'(t)\} \\
&= \frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) + i\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))
\end{aligned}$$

ここで U, V は偏導関数が連続，つまり C^1 級であることより合成関数の微分法を用いた．

- したがって

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}U(x(t),y(t))dt + i\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}V(x(t),y(t))dt \\
&= [U(x(t),y(t))]_\alpha^\beta + i\,[V(x(t),y(t))]_\alpha^\beta \\
&= \{U(x(\beta),y(\beta)) - U(x(\alpha),y(\alpha))\} \\
&\qquad\qquad + i\{V(x(\beta),y(\beta))) - V(x(\alpha),y(\alpha))\} \\
&= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

よって示された．□

系 8.2

$f(z)$ は命題 8.1 と同じ条件を満たすとする．このとき C が D 内の区分的に滑らかな閉曲線ならば

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

8.2 Cauchy の積分定理

- $f(z)$ が領域 D で連続で，1 価正則な関数 $F(z)$ が存在して $F'(z) = f(z)$ (in D) が成り立つ，つまり $f(z)$ が原始関数をもつならば，複素積分の値は曲線の始点と終点のみによって定まり，特に閉曲線ならば 0 になることを学んだ．

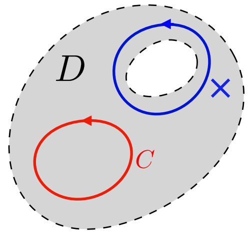
- 実は，次の Cauchy の積分定理は，$f(z)$ が正則であれば同じことが成り立つことを主張する．

定理 8.3(Cauchy の積分定理)

$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則とする．C は D 内の単純閉曲線で，C の内部は D の点のみからなるものとする．このとき

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ．



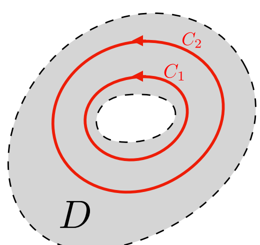
- 証明とそれに関する事情は後ほど述べる．
- Cauchy の積分定理を用いると次のことが得られる．

命題 8.4

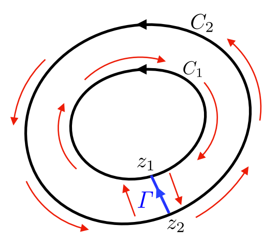
$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則とする．D 内の 2 つの単純閉曲線 C_1, C_2 について C_1 は C_2 の内部にあるものとする．また，C_1 と C_2 で囲まれる部分が D の点のみからなるとき

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つ．



証明



- 図のように C_1, C_2 にそれぞれ点 z_1, z_2 をとり，z_2 と z_1 を D 内の曲線 Γ で結ぶ．このとき曲線

$$C := C_2 + \Gamma + (-C_1) + (-\Gamma)$$

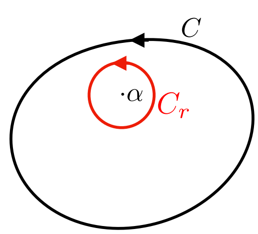
を考える．

- C で囲まれる部分が D のみからなるので Cauchy の積分定理より
$$\int_C f(z)dz = 0$$
が成り立つ．

- 一方
$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_2+\Gamma+(-C_1)+(-\Gamma)} f(z)dz \\ &= \int_{C_2} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-\Gamma} f(z)dz \\ &= \int_{C_2} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{\Gamma} f(z)dz \\ &= \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz\end{aligned}$$

- したがって
$$\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz = 0 \quad \text{つまり} \quad \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$
が成り立つ．□

例 α を内部に含む任意の単純閉曲線 C に対して
$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = 2\pi i$$
が成り立つ．実際 $r>0$ を十分小さくとれば，中心 α, 半径 r の円 C_r は C の内部に含まれる．



7 節例題 2 より
$$\int_{C_r} \frac{1}{z-\alpha}dz = 2\pi i$$
であり，C と C_r で囲まれる部分で $\dfrac{1}{z-\alpha}$ は正則であるので命題 8.4 より
$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \int_{C_r} \frac{1}{z-\alpha}dz = 2\pi i$$
が成り立つ．

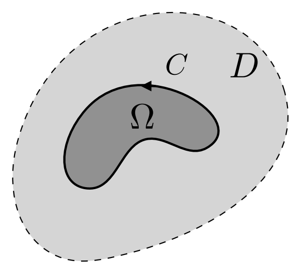
8.3 Cauchy の積分定理の証明

- Cauchy の積分定理の証明の前に次の **Green の定理**を紹介する．

定理 8.5（Green の定理）

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ は D で C^1 級とする．C は D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線で（簡単のため）C の内部 Ω は D の点のみからなるものとする．このとき次が成り立つ：

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



- Green の定理の右辺は $\overline{\Omega}$ における二重積分である．左辺について今一度説明しよう．

- $\mathbb{R}^2$ の滑らかな曲線 $C: x = x(t),\ y = y(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ （$(x(t),\ y(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で C^1 級，$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ ${}^\forall t \in [\alpha, \beta]$）が与えられたとき

$$\int_\alpha^\beta \{P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\}dt$$

  は曲線の向きを変えないパラメータのとりかえについて不変であるのでこれを

$$\int_C P dx + Q dy$$

  と表す（詳しくはベクトル解析の参考書をみよ）．

- Green の定理の証明は補足で行う．

Cauchy の積分定理の証明

- $f(z)$ は D で正則であることが仮定であったが，さらに **$f'(z)$ は連続であると仮定して**証明する．このとき $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とすると u, v は D で C^1 級である．

- C を $C: z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ とすると複素積分の計算式 (7.3)（70 ページ）より

$$
\begin{aligned}
&\int_C f(z)dz \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{ u(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right\} dt \\
&\qquad + i \int_\alpha^\beta \left\{ v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right\} dt \\
&= \int_C udx + (-v)dy + i \int_C vdx + udy
\end{aligned}
$$

- Green の定理と Cauchy-Riemann の関係式より

$$
\begin{aligned}
\int_C udx + (-v)dy &= \iint_{\overline{\Omega}} \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dxdy = 0, \\
\int_C vdx + udy &= \iint_{\overline{\Omega}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dxdy = 0.
\end{aligned}
$$

  ここで u, v は D で C^1 級であることを用いた.

- したがって

$$
\int_C f(z)dz = 0
$$

□

注

- この証明においては $f'(z)$ の連続性を仮定したが，本来 $f(z)$ が D において正則であることの定義は $f(z)$ が D の各点において微分可能であることのみを要求し，$f'(z)$ の連続性を要求していない．したがってこの証明は完全ではない.

- $f(z)$ が D で正則ならば，$f(z)$ は D で何回も微分可能であるが，その証明に Cauchy の積分定理を用いるため先取りは不可能である.

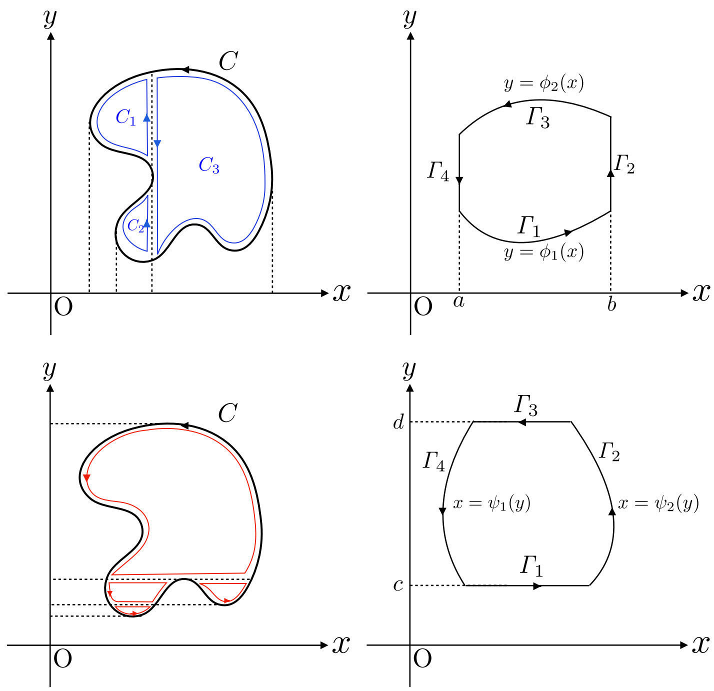
- 正則性の定義に $f'(z)$ の D における連続性を入れるという立場の書物もある．実際そうしても正則関数全体は変わらない.

- $f'(z)$ の連続性を仮定せずに Cauchy の積分定理を証明したのは Goursat でありこの定理は Cauchy-Goursat の定理ともいわれる．そこでは微分可能性の言い換え：

$$
\begin{aligned}
&f(x) = f(z_0) + {}^{\exists}A(x - x_0) + g(z)(z - z_0) \\
&(g \text{ は } z_0 \text{ 連続で } g(z_0) = 0)
\end{aligned}
$$

  を用いる．詳しくは複素関数論 II で学ぶ.

8.4 補足：Green の定理の略証



- 左図のように一般の単純閉曲線 C を考える場合，図のように C で囲まれる領域を分割し，各々が右図のような縦線型領域になるかあるいは各々が横線型領域になるように分割すると，各々の領域の境界に沿う線積分に打ち消しが起こり，C に沿う線積分が残る．したがって，右図のような縦線型領域あるいは横線型領域を考えれば十分である．

- $\displaystyle\iint_{\overline{\Omega}}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_C Pdx$ を示すには C で囲まれる領域を縦線型領域に分割する．したがって上右図の場合に示せばよい．

- $[a,b]$ 上で C^1 級の関数 $\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ を用いて $\overline{\Omega}$ が

$$\overline{\Omega}=\{y\in[\psi_1(x),\psi_2(x)]|a\le x\le b\}$$

と表される場合を考える．この領域の境界を反時計に回る区分的に滑らかな曲線を考え，図のように Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 を定める：

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1: x(t)=t,\ y(t)=\phi_1(t)\ \ (a\le t\le b),\\
&\Gamma_2: x(t)=b,\ y(t)=t\ \ (\phi_1(b)\le t\le \phi_2(b)),\\
&\Gamma_3: x(t)=-t,\ y(t)=\phi_2(-t)\ \ (-b\le t\le -a),\\
&\Gamma_4: x(t)=a,\ y(t)=-t\ \ (-\phi_2(b)\le t\le -\phi_1(t))
\end{aligned}$$

となる．

- 重積分について

$$\iint_{\overline{\Omega}} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy \right\} dx$$
$$= \int_a^b \{P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))\} dx$$

- 次に

$$\int_{\Gamma_1} Pdx = \int_a^b P(t, \phi_1(t)) x'(t) dt = \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx$$
$$\int_{\Gamma_2} Pdx = \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} P(b, t) x'(t) dt = 0$$
$$\int_{\Gamma_3} Pdx = \int_{-b}^{-a} P(-t, \phi_2(-t)) x'(t) dt = -\int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$$
$$\int_{\Gamma_4} Pdx = \int_{-\phi_2(b)}^{-\phi_1(b)} P(b, -t) x'(t) dt = 0$$

よって

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} Pdx = \int_a^b \{P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))\} dx = \iint_{\overline{\Omega}} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

である．

- $\iint_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = \int_C Qdy$ を示すためには C で囲まれる領域を横線型領域に分割する．したがって下右図のような横線型領域の場合に帰着して示せばよい．

9　Cauchy の積分公式

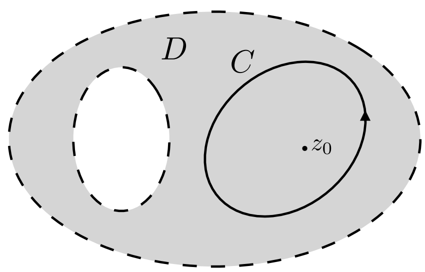
9.1　Cauchy の積分公式 (1)

定理 9.1(Cauchy の積分公式)

f は領域 D で正則とする．$z_0 \in D$ とし，z_0 を内部に含む（区分的に滑らかな）D 内の単純閉曲線 C に対し，C の内部は全て D の点とする．このとき

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

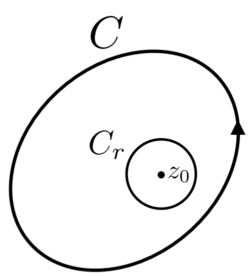
が成り立つ．



証明

- 図のように，C の内部に含まれる z_0 中心，半径 r の円 C_r を考える：

$$C_r : z = z_0 + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



- 関数 $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ は $D \backslash \{z_0\}$ で正則で，C と C_r で囲まれる部分は $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ が正則である $D \backslash \{z_0\}$ の点のみからなるので命題 8.4 より

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{9.1}$$

- 等式 (9.1) の右辺を次のように変形する：

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{9.2}$$

- 直接計算から第 2 項は

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_{C_r} \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)2\pi i = 2\pi f(z_0)i$$

- 次に (9.2) の第 1 項を考える．f は z_0 で連続であるから，任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- C_r の半径 r を $0 < r < \delta$ とすれば C_r 上の z に対し $|z-z_0| = r < \delta$ であるから

$$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{on} \quad C_r$$

が成り立つ．

- これより

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{r} \le \frac{\varepsilon}{r} \quad \text{on} \quad C_r$$

- よって命題 7.4（複素積分の評価公式）より

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{r} \times 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

- (9.1), (9.2) より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + 2\pi f(z_0)i$$

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi f(z_0)i\right| \le 2\pi\varepsilon$$

ところが上の式の左辺は 0 以上で ε とは無関係であり，任意であるから

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi f(z_0)i = 0$$

つまり

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

が成り立つ．

□

9.2 Cauchy の積分公式 (2)

定理 9.2(Cauchy の積分公式の微分形)

定理9.1 と同じ条件を仮定する．f は D で何回でも微分可能であって次が成り立つ：

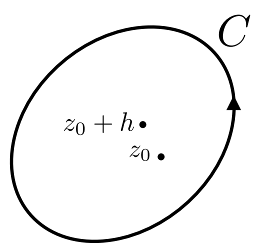
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$\boxed{\textbf{証明}}$ $n = 1, 2$ の場合のみ証明する．

***n* = 1 のとき：** z_0 を C の内部の任意の点とする．

- 定理 2.2 から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$



- $|h|$ が十分小さければ $z_0 + h$ も C の内部の点であるので同じく定理 2.2 より

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz$$

  が成り立つ．

- よって

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi ih}\int_C \left\{\frac{f(z)}{z-(z_0+h)} - \frac{f(z)}{z-z_0}\right\}dz \\ &= \frac{1}{2\pi ih}\int_C f(z)\frac{h}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz\end{aligned}$$

- 上の等式において $h \to 0$ のとき，$\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \to f'(z_0)$ である．したがって次のことを証明すればよい：

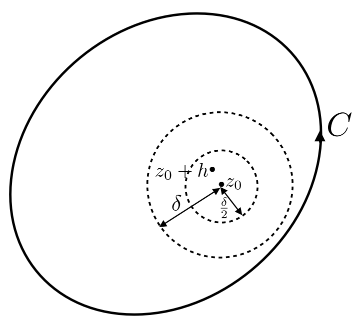
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

- そのために 2 つの差をとりそれが $h \to 0$ のとき 0 に収束することを示す．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^2}dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right]dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{h}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz \\
=&\frac{h}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz
\end{aligned}$$

- z_0 は C の内部の点であるから，$\delta > 0$ を十分小さくとると C は $U_\delta(z_0)$ の内部にすっぽり含まれる．いいかえれば z_0 から距離 δ 以内には曲線 C の点がないようにできる：

$$|z-z_0| \geq \delta \quad \text{on} \quad C$$



- 次に $|h| < \delta/2$ とすれば三角不等式から

$$\begin{aligned}
|z-(z_0+h)| &= |(z-z_0)-h| \\
&\geq |z-z_0| - |h| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2 \quad \text{on} \quad C
\end{aligned}$$

- C は有界閉集合より $|f(z)| \leq M$ on C となる $M > 0$ が存在する．

- よって C 上

$$\begin{aligned}
&\left|f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}\right| \\
=&|f(z)|\frac{1}{|z-(z_0+h)||z-z_0|^2} \leq M\frac{1}{\frac{\delta}{2}\cdot\delta^2} = \frac{2M}{\delta^3}
\end{aligned}$$

よって命題 7.4（複素積分の評価公式）より C の長さを L とすれば

$$\left|\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz\right| \leq \frac{2M}{\delta^3}L$$

- 以上より

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz = 0$$

であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

がわかり，$n=1$ の場合，公式が成り立つことが示された．

$n=2$ の場合：

- $n=1$ のときの公式より $|h|$ が十分小さければ

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,\quad f'(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\{z-(z_0+h)\}^2}dz$$

が成り立つ．

- これより

$$\begin{aligned}\frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi ih}\int_C \left[\frac{f(z)}{\{z-(z_0+h)\}^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right]dz \\ &= \frac{1}{2\pi ih}\int_C f(z)\frac{h(2z-2z_0-h)}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2}dz\end{aligned}$$

- 次のことを示す：

$$\lim_{h\to\ 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2}dz = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \tag{9.3}$$

このことを示せば $h\to 0$ のとき $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h}$ の極限が存在する，つまり f' が z_0 で微分可能ということになり，それが $f''(z_0)$ となる．

- 差をとると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2} - \frac{2}{(z-z_0)^3}\right]dz \tag{9.4}$$

$[\cdots]$ 内を通分して整理すると

$$\frac{3(z-z_0)h-2h^2}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}$$

となるので，考えている差は

$$\frac{h}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}dz$$

- ここで $n=1$ の場合の証明のときと同様に δ をとり $|h|<\delta/2$ とすれば

$$|z-z_0|\geq\delta,\quad |z-(z_0+h)|\geq\delta/2 \quad \text{on} \quad C$$

が成り立つ．また，C は有界な曲線より，ある $K>0$ が存在して次が成り立つ

$$|z-z_0|\leq K \quad \text{on} \quad C$$

- よって $M=\max_{z\in C}|f(z)|$ とすれば

$$\begin{aligned}\left|f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}\right| &\leq |f(z)|\frac{3|z-z_0|+2|h|}{|z-(z_0+h)|^2|z-z_0|^3}\\ &\leq M\frac{3K+2\frac{\delta}{2}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\delta^3}=\frac{4M(3K+\delta)}{\delta^5}\end{aligned}$$

- よって，命題 7.4（複素積分の評価公式）より L を C の長さとすれば

$$\left|\int_C f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}dz\right|\leq\frac{4M(3K+\delta)}{\delta^5}L$$

以上より考えている差 (9.4) は $h\to 0$ のとき 0 に収束し，(9.3) が示され

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

が証明された．

□

注 一般の n については帰納法を用いるが計算が相当煩雑である．

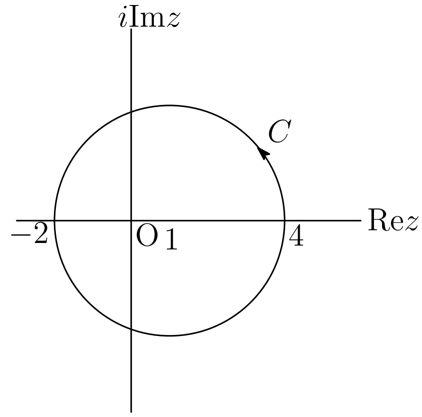
例題 1

次の複素積分の値を求めよ．

$$\int_C\frac{e^z}{z(z+1)}dz$$

ただし C は 1 を中心とする半径 3 の円とする．

解



- $\dfrac{e^z}{z(z+1)} = \dfrac{e^z}{z} - \dfrac{e^z}{z+1}$ である.
- Cauchy の積分公式により

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-0}dz = e^0 = 1 \\
&\therefore \quad \int_C \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i, \\
&\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z+1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-(-1)}dz = e^{-1} = \frac{1}{e} \\
&\therefore \quad \int_C \frac{e^z}{z+1}dz = \frac{2\pi i}{e}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\int_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz = \int_C \frac{e^z}{z}dz - \int_C \frac{e^z}{z+1}dz = 2\pi i - \frac{2\pi i}{e} = \boldsymbol{2\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)i}
$$

例題２

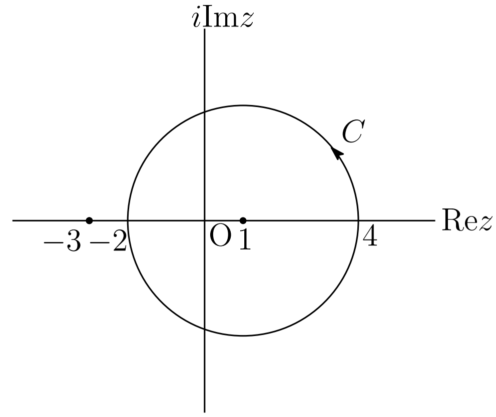
次の複素積分の値を求めよ.

$$
\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}dz
$$

ただし C は 1 を中心とする半径 3 の円とする.

指針 $\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}$ の形にする.

解



- $f(z) = \dfrac{e^z}{z+3}$ とおくと $f(z)$ は $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ で正則である．
- C は $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ の曲線でその内部は $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ の点のみからなるので Cauchy の積分公式（微分形）により

$$f'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz$$

- また

$$f'(z) = \frac{e^z(z+3) - e^z}{(z+3)^2} = \frac{z+2}{(z+3)^2}e^z \quad \therefore \quad f'(1) = \frac{3}{16}e$$

以上より

$$\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = 2\pi i f'(1) = \boldsymbol{\frac{3}{8}e\pi i}$$

例題３

Cauchy の積分公式を用いて，積分

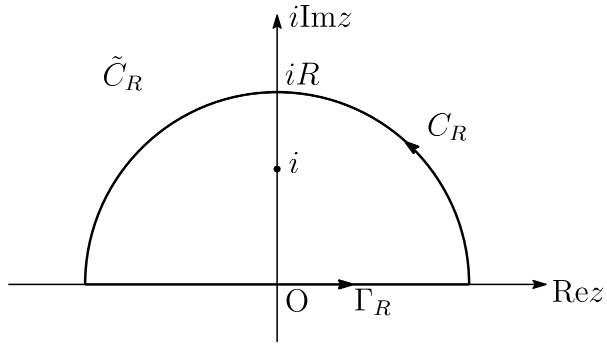
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}dx \quad (a > 0 : \text{定数})$$

の値を求めよ．

指針 $e^{iat} = \cos at + i\sin at$ であることを用い，$\dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$ の複素積分を用いる．

解

- $R > 0$ に対して，実軸上の $-R$ と R を結ぶ線分 Γ_R と，原点中心，半径 R の円の上半平面にある部分 C_R を結んでできる曲線 $\tilde{C}_R$ を考える：$\tilde{C}_R = \Gamma_R + C_R$



- 次に関数

$$\frac{e^{iaz}}{z^2+1}=\frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)}=\frac{f(z)}{z-i}\quad\left(f(z)=\frac{e^{iaz}}{z+i}\text{ とおいた}\right)$$

  を考える．

- $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z+i}$ は $z=-i$ を除いて（$\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ で）正則である．よって，任意の $R>0$ に対して $f(z)$ は $\tilde{C}_R$ およびその内部で正則である．

- また，任意の $R>1$ に対して $z=i$ は $\tilde{C}_R$ の内部の点である．

- よって Cauchy の積分公式より

$$\int_{\tilde{C}_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\int_{\tilde{C}_R}\frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i f(i)=\pi e^{-a} \tag{9.5}$$

- 一方

$$\int_{\tilde{C}_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz+\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz \tag{9.6}$$

- Γ_R は $z=t(-R\leq t\leq R)$ とパラメータ表示されるので

$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{iat}}{t^2+1}dt=\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx$$

- C_R は $z=Re^{it}(0\leq t\leq\pi)$ とパラメータ表示される．このとき

$$e^{iaz}=e^{iaRe^{iz}}=e^{iaR(\cos t+i\sin t)}=e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}$$
$$|e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}|=e^{-aR\sin t}$$
$$z^2+1=R^2e^{2it}+1$$
$$|R^2e^{2it}+1|=|R^2e^{2it}-(-1)|\geq|R^2e^{2it}|-|-1|=R^2-1$$
$$\frac{dz}{dt}=iRe^{it}$$

より

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}}{R^2e^{2it}+1}iRe^{it}dt\right| \\
&\le \int_0^\pi \frac{|e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}|}{|R^2e^{2it}+1|}|iRe^{it}|dt \\
&\le \int_0^R \frac{e^{-aR\sin t}}{R^2-1}Rdt = \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-aR\sin t}dt
\end{aligned}
$$

- $\displaystyle\int_0^R e^{-aR\sin t}dt$ について考える.

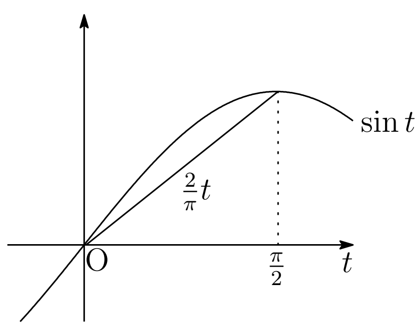
$$\int_0^\pi e^{-aR\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-aR\sin t}dt$$

第 2 項について $s = \pi - t$ とおくとき $\begin{array}{c|c} t & \frac{\pi}{2} \to \pi \\ \hline s & \frac{\pi}{2} \to 0 \end{array}$, $ds = -dt$ より

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-aR\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-aR\sin(\pi-s)}(-ds) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt$$

よって $\displaystyle\int_0^\pi e^{-aR\sin t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt$

- 次に $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{2}{\pi}t \le \sin t$ だから



$$e^{-a\sin t} \le e^{-aR\frac{2}{\pi}t}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}t}dt \\
&= \left[-\frac{\pi}{2aR}e^{-aR\frac{2}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2aR}(1-e^{-aR}) \le \frac{\pi}{2aR}
\end{aligned}
$$

- 以上まとめると

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{R^2e^{2it}+1}iRe^{it}\right| \le \int_0^R \frac{|e^{iaRe^{it}}|}{|R^2e^{2it}+1|}|iRe^{it}|dt \le \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-aR\sin t}dt$$
$$\le \frac{2R}{R^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt \le \frac{2R}{R^2-1}\cdot\frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{a(R^2-1)} \to 0 \quad (\text{as } R\to\infty)$$

したがって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = 0.$

- 一方,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax + i\sin ax}{x^2+1}dx\end{aligned}$$

- (9.5), (9.6) より

$$\pi e^{-a} = \int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz + \int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz$$

$R\to\infty$ として

$$\pi e^{-a} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax + i\sin ax}{x^2+1}dx$$

両辺の実部をとり

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx = \pi e^{-a}$$

10　Cauchyの評価式・Liouvilleの定理とその応用

- Cauchyの積分公式（微分形）を復習しよう．

Cauchyの積分公式の微分形（命題9.2）

$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則とする．$f(z)$ は D で何回も微分可能である．さらに $z_0 \in D$ とし，z_0 を内部に含む（区分的に滑らかな）D 内の単純閉曲線 C に対して，C の内部が D のみの点からなるとき

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

- このCauchyの積分公式からCauchyの評価式，Liouvilleの定理を導き，その応用として代数学の基本定理を証明する．

10.1　Cauchyの評価式

命題10.1(Cauchyの評価式)

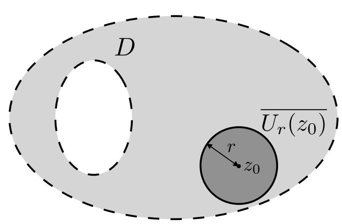
$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則であるとする．ある $r > 0$ に対し

$$\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset D$$

であり $C_r : |z - z_0| = r$ 上で $|f(z)| \leq M$ （M: 定数）が成り立つとき

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．



証明 Cauchyの積分公式（微分形）（命題9.2）から

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{10.1}$$

ここで C_r 上 $|z - z_0| = r$ であり，仮定から $|f(z)| \leq M$ on C_r であるから

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}} \quad \text{on} \quad C_r$$

よって複素積分の評価式（命題 7.4）より

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = 2\pi \frac{M}{r^n}$$

よって (10.1) より

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{M}{r^n} = \frac{n!M}{r^n}\end{aligned}$$

□

10.2　Liouville の定理とその応用

Cauchy の評価式を用いると，次の **Liouville の定理**が導かれる．

定理 10.2（Liouville の定理）

$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則でかつ有界であるとする．このとき $f(z)$ は定数関数である．

証明

- $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有界であるから，ある定数 $M > 0$ が存在して

$$|f(z)| \leq M \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

  が成り立つ．

- $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから，任意に $z_0 \in \mathbb{C}$ をとると，任意の $r > 0$ に対し $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathbb{C}$ であるので命題 10.1（Cauchy の評価式）より

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \tag{10.2}$$

  が成り立つ．

- $r > 0$ は任意であるから (10.2) で $r \to \infty$ とすることにより

$$f'(z_0) = 0$$

  が成り立つ．$z_0 \in \mathbb{C}$ は任意であるから

$$f'(z) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

  が成り立つ．

- 命題 5.3 より $f(z)$ は定数関数である．□

注 $\sin z$ は $\mathbb{C}$ で正則であるが，明らかに定数関数でない．実際，6 節で見たように，$\sin z$ は有界な関数ではない．

- Liouville の定理から次の**代数学の基本定理**が導かれる．

定理 10.3（代数学の基本定理）

複素係数の n 次代数方程式 $(n \geq 1)$

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

は $\mathbb{C}$ のおいて少なくとも 1 つ解をもつ．

証明

- $P(z) := z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ とおき，結論を否定する，すなわち

$$P(z) \neq 0 \quad \text{for} \quad {}^\forall z \in \mathbb{C} \tag{10.3}$$

  とする．

- $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ とおくと (10.3) より，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ の各点で微分可能である，すなわち $\mathbb{C}$ 全体で正則である．

- 次に $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で有界であることを示そう．

- $P(z) = z^n \left(1 + \dfrac{c_1}{z} + \cdots + \dfrac{c_n}{z^n}\right)$ で

$$\left|1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}\right| \geq 1 - \frac{|c_1|}{|z|} - \frac{|c_2|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|c_n|}{|z|^n}$$

  より

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left|1 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}\right| \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|c_1|}{|z|} - \frac{|c_2|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|c_n|}{|z|^n}\right) \\ &\to \infty \quad (\text{as} \quad |z| \to \infty) \end{aligned}$$

  であるから

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

  である．

- よって，$a > 0$ を十分大きくとれば

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{for} \quad |z| \geq a$$

  が成り立つ．

- また，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから連続である．よって有界閉集合 $\overline{U_a(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$ 上で $|f(z)|$ は最大値をとるのでその最大値を M_1 とすると次が成り立つ：

$$|f(z)| \leq M_1 \quad \text{for} \quad |z| \leq a$$

- よって $M = 1 + M_1$ とおけば

$$|f(z)| \leq M \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

  が成り立つ．つまり $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界である．

- Liouville の定理（定理 10.2）より $f(z)$ したがって $P(z)$ は定数関数となるが，これは $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$ に矛盾である．

- 以上より $P(z)$ は少なくとも 1 つの $z \in \mathbb{C}$ で $P(z) = 0$ が成り立つ．$\square$

11　一次分数関数と円々対応

11.1　一次分数関数

- $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{C}$ を定数とし，関数
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{11.1}$$
を **一次分数関数** という．

- $c \neq 0$ のとき
$$w = \frac{\dfrac{bc-ad}{c}}{cz+d} + \frac{a}{c} \tag{11.2}$$
とかきかえられるので
$$z_1 = cz, \;\to\quad z_2 = z_1 + d \;\to\quad z_3 = \frac{1}{z_2} \to$$
$$z_4 = \frac{bc-ad}{c} z_3 \quad\to\quad w = z_4 + \frac{a}{c}$$
と分解すると 1 次分数関数は次の 3 つの特別な 1 次分数関数
  (i) $w = Az \quad (A \in \mathbb{C},\ A \neq 0)$
  (ii) $w = z + \beta \quad (\beta \in \mathbb{C})$
  (iii) $w = \dfrac{1}{z}$
を合成したものである．

- $c = 0$ のとき（$ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$ であることに注意）
$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$
なので (i), (ii) の合成として得られる．

- この節の目標は次の「円々対応」を示すことである．

定理 11.1（円々対応）

一次分数関数 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ は z-平面の円または直線を w-平面の円または直線へ写す．

- 直線は後に述べる Riemann 球面においては円と考えられることからその上では円は円に写すと言えるのである．

11.2　円々対応の証明

補題 11.2

$z = x + yi$, $\alpha = a + bi$ $(x,\, y,\, a,\, b \in \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とするとき

(1) $ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) = -c \quad (\alpha \neq 0)$

(2) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha} z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$

証明

(1) $(\Rightarrow)$ $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ とすると

$$\begin{aligned}
&a\frac{z+\overline{z}}{2} + b\frac{z-\overline{z}}{2i} + c = 0\\
&a(z+\overline{z}) - ib(z-\overline{z}) + 2c = 0\\
&(a-bi)z + (a+bi)\overline{z} = -2c\\
&\overline{\alpha} z + \alpha\overline{z} = -2c\\
&\mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) = -c
\end{aligned}$$

(2) $(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) = -c &\Leftrightarrow \mathrm{Re}[(a-bi)(x+yi)] = -c\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}[(ax+by) + (ay-bx)i] = -c
\end{aligned}$$

よって $ax + by + c = 0$ である．

(3)

$$\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-\alpha|^2 = r^2\\
&\Leftrightarrow \quad (z-\alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2\\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \overline{\alpha} z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0
\end{aligned}$$

よって示された．□

注１ $z\overline{z} - \overline{\alpha} z - \alpha\overline{z} + c = 0$ が円 $\Leftrightarrow$ $\alpha\overline{\alpha} - c > 0$

注２ 直線 $\mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) = -c$ が原点を通る $\Leftrightarrow$ $c = 0$

注３ 円 $z\overline{z} - \overline{\alpha} - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ が原点を通る $\Leftrightarrow$ $\alpha\overline{\alpha} = r^2$

- 円々対応を証明するには，１次分数関数 (i)〜(iii) により，z 平面の直線あるいは円が w 平面の直線あるいは円に写ることを示せば十分である．

(i) $\boldsymbol{w = Az}$ ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{A \neq 0}$)

このとき $z = \dfrac{\overline{A}}{|A|^2}w$ である．

- z が直線 $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}z) = -c$ 上の点であれば w は $\mathrm{Re}\left[\overline{\alpha}\dfrac{\overline{A}}{|A|^2}w\right] = -c$ つまり

$$\mathrm{Re}[\overline{\alpha A}w] = -c|A|^2$$

となる．これは w 平面の直線を表す．つまり，z 平面上の直線は (i) により w 平面上の直線に写る．

- z が円 $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ 上の点であればこれに $z = \dfrac{\overline{A}}{|A|^2}w$ を代入して整理すると

$$w\overline{w} - (\alpha A)\overline{w} - \overline{\alpha A}w + (\alpha A)(\overline{\alpha A}) - |A|^2r^2 = 0$$

これは w 平面の中心 αA, 半径 $|A|r$ の円を表す．つまり z 平面の円は (i) により w 平面の円に写る．

(ii) $\boldsymbol{w = z + \beta}$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$)

このとき $z = w - \beta$

- z が直線 $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}z) = -c$ 上の点であれば $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}(w-\beta)] = -c$ つまり

$$\mathrm{Re}[\overline{\alpha}w] = -(c - \mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta))$$

これは w 平面の直線を表す．つまり z 平面の直線は (ii) により w 平面の直線に写る．

- z が円 $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ 上の点であればこれに $z = w - \beta$ に代入して整理すると

$$w\overline{w} - (\alpha+\beta)\overline{w} - \overline{(\alpha+\beta)}w + (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} - r^2 = 0$$

これは w 平面の中心 $\alpha + \beta$，半径 r の円を表す．つまり z 平面の円は (ii) により w 平面の円に写る．

(iii) $\boldsymbol{w = \dfrac{1}{z}}$

このとき $z = \dfrac{1}{w}\left(= \dfrac{\overline{w}}{|w|^2}\right)$

- z が直線 $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}z) = -c$ 上の点とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\overline{\alpha}\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right] &= -c \\ \mathrm{Re}(\overline{\alpha w}) &= -c|w|^2 \\ \mathrm{Re}(\alpha w) &= -c|w|^2 \\ \mathrm{Re}(\overline{\overline{\alpha}}w) &= -c|w|^2 \end{aligned} \tag{11.3}$$

  - ⋆ $c = 0$ つまり z が原点を通る直線上の点とすると (11.3) より $\mathrm{Re}(\overline{\overline{\alpha}}w) = 0$ であり，w 平面の原点を通る直線を表す．したがって，z 平面の原点を通る直線は (iii) により原点を通る直線に写る．
  - ⋆ $c \neq 0$ のとき (11.3) より $\mathrm{Re}(\overline{\overline{\alpha}}w) = -c|w|^2$ であり，

$$\begin{aligned} 2c|w|^2 + \overline{\overline{\alpha}}w + \overline{\alpha w} &= 0 \\ |w|^2 + \frac{\overline{\overline{\alpha}}}{2c}w + \frac{\overline{\alpha}}{2c}\overline{w} &= 0 \\ \left(w + \frac{\overline{\alpha}}{2c}\right)\left(\overline{w} + \frac{\overline{\overline{\alpha}}}{2c}\right) &= \frac{|\alpha|^2}{4c^2} \\ \left|w + \frac{\overline{\alpha}}{2c}\right|^2 &= \frac{|\alpha|^2}{4c^2} \end{aligned}$$

    これは w 平面の原点を通る円である．よって原点を通らない直線は (iii) により原点を通る円に写る．

- z が円 $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ 上の点であれば $z = \dfrac{1}{w}$ を代入して整理すると

$$(\alpha\overline{\alpha} - r^2)w\overline{w} - \overline{\alpha w} - \alpha w + 1 = 0 \tag{11.4}$$

  - ⋆ $\alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ つまり z が原点を通る円上の点ならば (11.4) より $\mathrm{Re}(\alpha w) = \dfrac{1}{2}$ となり w 平面上の原点を通らない直線を表す．つまり， z 平面の原点を通る円は (iii) により w 平面の原点を通らない直線に写る．
  - ⋆ $\alpha\overline{\alpha} - r^2 \neq 0$ のとき $p = \alpha\overline{\alpha} - r^2$ とおくと $p \in \mathbb{R}$ に注意すると (11.4) より

$$\begin{aligned} w\overline{w} - \frac{\overline{\alpha}}{p}\overline{w} - \frac{\alpha}{p}w + \frac{1}{p} &= 0 \\ w\overline{w} - \frac{\overline{\alpha}}{p}\overline{w} - \frac{\alpha}{p}w + \frac{\alpha\overline{\alpha}}{p^2} &= \frac{r^2}{p^2} \\ \left|w - \frac{\overline{\alpha}}{p}\right|^2 &= \frac{r^2}{p^2} \end{aligned}$$

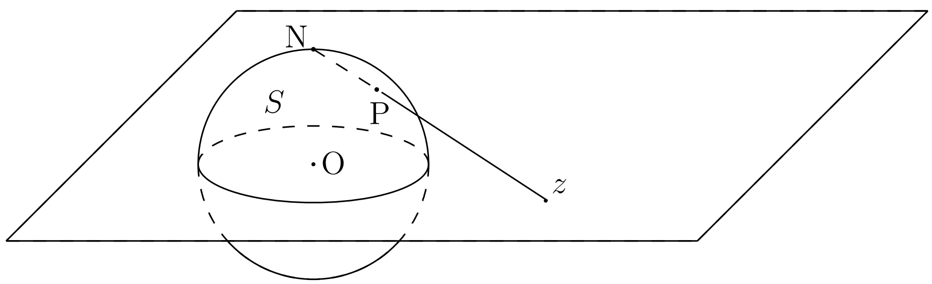
    これは w 平面の原点を通らない円を表す．したがって z 平面の原点を通らない円は w 平面の原点を通らない円に写る．

以上で円々対応が示された．

$\boxed{\textbf{注4}}$ $w = \dfrac{1}{z}$ は $z = 0$ で定義されない．複素数平面に ∞ で表される無限遠点を付け加えることにより $z = 0$ のとき $w = \infty$ と定義することもできる．次節の Riemann 球面で導入される．

11.3 Riemann 球面

- 複素数平面に ∞ で表される**無限遠点**を付け加えると便利である．
- $\mathbb{R}^3$ の点を (X, Y, Z) で表す．$\mathbb{R}^3$ の点 $(x, y, 0)$ を $x + yi \in \mathbb{C}$ と同一視する．



- 上の図のように $\mathbb{R}^3$ に原点を中心とした単位球 S を 1 つおく（これを **Riemann 球面**）．N$(0, 0, 1)$ とおく．
- XY 平面上の点 A$(x, y, 0)$ を 1 つとると A と N を結ぶ直線は S の N 以外の点 P と交わる．
- 一方 S の N 以外の点 P を 1 つとると直線 PN は XY 平面の点 A と交わる．
- A と P の関係を式で表そう．
- リーマン球面上の点 P(X_0, Y_0, Z_0) に対する複素数 $x + yi$ を求めよう．
- 直線 NP の方程式のパラメータ表示は

$$X = 0 + X_0 t,\ Y = 0 + Y_0 t,\ Z = 1 + (Z_0 - 1)t$$

  である．P$\neq$ N より $Z_0 \neq 1$ である．

- $Z = 0$ となるとき $X = x, Y = y$ であるから

$$x = \frac{X_0}{1 - Z_0},\quad y = \frac{Y_0}{1 - Z_0}$$

  である．つまり対応する複素数は

$$\frac{X_0}{1 - Z_0} + \frac{Y_0}{1 - Z_0} i$$

  である．

- 一方 $x+yi$ に対応するリーマン球面の点 $\mathrm{P}(X_0, Y_0, Z_0)$ を求めよう.
- $\mathrm{A}(x, y, 0)$ と $\mathrm{N}(0, 0, 1)$ を結ぶ直線のパラメータ表示は

$$X = 0 + xt, \quad Y = 0 + yt, \quad Z = 1 - t$$

- $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} &x^2t^2 + y^2t^2 + (1-t)^2 = 1 \\ &(x^2 + y^2 + 1)t^2 - 2t = 0 \end{aligned}$$

- $t = 0$ は P=N となるので不適．よって $t = \dfrac{2}{x^2+y^2+1}$ である．したがって求める点は

$$\mathrm{P}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

言い換えると

$$\left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

を得る．以上まとめよう：

$$\begin{array}{ccc} \text{リーマン球面上の点} & & \text{複素数} \\ \mathrm{P}(X, Y, Z) & \rightarrow & \dfrac{X}{1-Z} + \dfrac{Y}{1-Z}i \\ \mathrm{P}\left(\dfrac{2x}{|z|^2+1}, \dfrac{2y}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & \leftarrow & z = x + yi \end{array}$$

- まず，Riemann 球面上の点 $\mathrm{P}(X, Y, Z)$ を $\mathrm{N}(0, 0, 1)$ に近づけてみると，対応する複素数の絶対値の平方は

$$\frac{X^2}{(1-Z)^2} + \frac{Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{1+Z}{1-Z} \to \infty \quad (Z < 1 \text{ に注意})$$

ここで $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ を用いた．つまり対応する複素数は複素数平面上において原点から限りなく離れていく.

- 一方，複素数 z が $|z| \to \infty$ となるとき，対応するリーマン球面上の点はどうなるかを調べよう.
- 命題 1.3(2) より

$$\left|\frac{2x}{|z|^2+1}\right|, \ \left|\frac{2y}{|z|^2+1}\right| \leq \frac{2|z|}{|z|^2+1} \to 0 \quad (\text{as} \ \ |z| \to \infty)$$

また

$$\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}=\frac{1-\frac{1}{|z|^2}}{1+\frac{1}{|z|^2}}\to 1 \quad (\text{as} \quad |z|\to\infty)$$

よって P$\to$ N (as $|z|\to\infty$) となる.

- $\mathbb{C}$ に Riemann 球面の N に対応する点 ∞（**無限遠点**）を付け加えてできる $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を $\overline{\mathbb{C}}$ と表し**拡張された複素数平面**という.
- 一次分数関数 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ に対して
  - $c=0$ のとき（このとき $a\neq 0$） $f(\infty)=\infty$
  - $c\neq 0$ のとき $f\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty,\ f(\infty)=\dfrac{a}{c}$ と定義すれば $f(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}$ で定義された $\mathbb{C}$ に値をとる関数となる.
- また $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ を z について解くと

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

となる.

- $c=0$ のとき $w=\infty\Rightarrow z=\infty$
- $c\neq 0$ のとき $w=\dfrac{a}{c}\Rightarrow z=\infty,\ w=\infty\Rightarrow z=-\dfrac{d}{c}$ である.
- したがって一次分数関数は $\overline{C}$ から $\overline{C}$ への 1 対 1 対応である.
- 証明は省くが
  - 複素数平面の円 $\Leftrightarrow$ Riemann 球面上の N を通らない円
  - 複素平面上の直線（∞ を含む） $\Leftrightarrow$ リーマン球面上の N を通る円

であるので定理 11.1 は次のように述べられる：

> 一次分数変換によって Riemann 球面における円は Riemann 球面における円にうつされる

12　等角写像

12.1　平面上の曲線とその接ベクトル

- $\mathbb{R}^2$ における滑らかな曲線は

$$C : x = x(t),\ y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

と表され，$x(t)$, $y(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で C^1 級で，各 $t \in [\alpha, \beta]$ で $(x'(t), y'(t))) \neq (0, 0)$ となることであった．

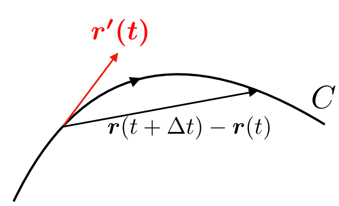
- 各 t に対して $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ とすると

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right)$$

であり $\Delta t \to 0$ のとき

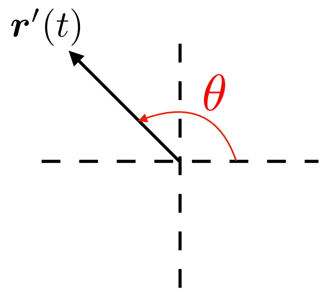
$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t), \quad \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \to y'(t)$$

であるので $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ とおくと $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ であり $\boldsymbol{r}'(t)$ は t が増加するとき，曲線上の点が進む向きと同じ方向を向く接線に平行なベクトルである．$\boldsymbol{r}(t)$ を C の**接ベクトル**という．



- 接ベクトルが x 軸正の部分となす（向きを込めた）角 $\theta \in (-\pi, \pi]$ は
  - 例えば $x'(t) > 0$ のときは $\theta = \tan^{-1} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$
  - $(x'(t), y'(t))$ が第 2 象限なら $\theta = \cos^{-1} \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$
  - $(x'(t), y'(t))$ が第 3 象限なら $\theta = -\cos^{-1} \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$
  - $x'(t) = 0$, $y'(t) > 0$ なら $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
  - $x'(t) = 0$, $y'(t) < 0$ なら $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$
  - $x'(t) < 0$, $y'(t) = 0$ なら $\theta = -\pi$

である．



- $C := z = z(t) = x(t) + iy(t)$ が複素数平面の滑らかな曲線の場合も同様に考えて

$$\theta = \arg z'(t)$$

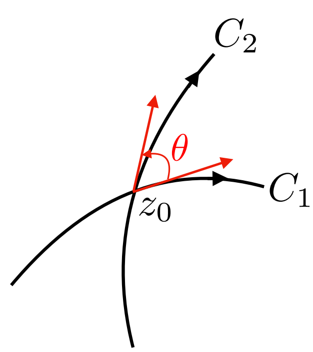
となる．

- z_0 で交わる 2 つの滑らかな曲線

$$C_1 : z = z_1(t), \quad C_2 : z = z_2(t)$$

$(z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ としてよい) の（向きを込めた）なす角はそれぞれの接ベクトルのなす角を向きを込めて考える．例えば C_1 の接ベクトルを回転させて C_2 の接ベクトルに重ねるとき，回転させる量を符号をつけて考える，実際 $\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$ である．

- これを **C_1 と C_2 のなす角**あるいは **C_2 が C_1 となす角**ということにする．



12.2　正則関数の等角性

- 複素関数 $w = f(z)$ が連続であるとき，z-平面の滑らかな曲線 $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ はこの関数（写像）により w-平面の曲線

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) \ \ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

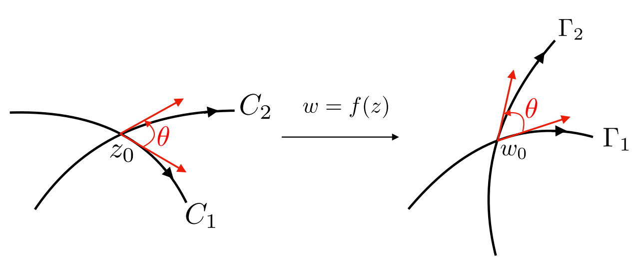
にうつる．

- $f(z)$ が正則ならば
$$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$$
であるから C の各点で $f'(z) \neq 0$ ならば Γ もまた w-平面の滑らかな曲線である．

- $f'(z) \neq 0$ が C の各点で成り立つとき Γ の $f(z_0) = f(z(t_0))$ における接ベクトルが w-平面の実軸正の部分となす角を ϕ とすると
$$\begin{aligned}\phi &= \arg w'(t_0) \\ &= \arg f'(z(t_0))z'(t_0) = \arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0) \\ &= \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) \\ &= \arg f'(z_0) + \theta\end{aligned} \tag{12.1}$$
が成り立つ．ここで θ は C の z_0 における接ベクトルが z-平面の実軸正の向きとなす角である．また $=$ は「2π の整数倍をの違いを許して」という意味である．

定義

- z-平面の領域 D で定義された D から w-平面への写像 $w = f(z)$ を考える．
- $z_0 \in D$ を通る D の滑らかな 2 曲線 C_1, C_2 に対し，それらの $w = f(z)$ の像をそれぞれ Γ_1, Γ_2 は $w_0 = f(z_0)$ を通る滑らかな曲線とする．
- このときどんな C_1 と C_2 に対してもそれらのなす角が Γ_1 と Γ_2 のなす角と向きを含めて等しいとき，$w = f(z)$ は z_0 で**等角**であるという．



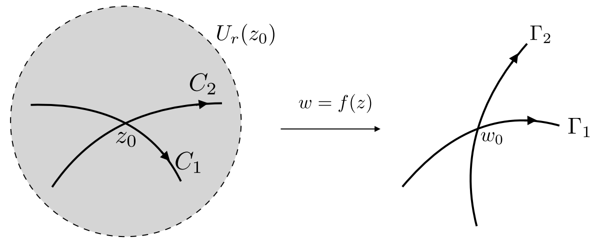
定理 12.1

関数 $f(z)$ は z_0 で正則で $f'(z_0) \neq 0$ ならば写像 $w = f(z)$ は z_0 で等角である．

証明

- $f(z)$ は z_0 で正則より，ある r-近傍 $U_r(z_0)$ の各点で微分可能である．
- さらに $f'(z)$ は $U_r(z_0)$ で連続（$f(z)$ は何回でも微分可能であることに注意）で $f'(z_0) \neq 0$ でより $r > 0$ を十分小さくとれば
$$f'(z) \neq 0 \ \text{ in } \ U_r(z_0)$$
が成り立つ．

- z_0 を通る $U_r(z_0)$ 内の滑らかな２曲線に対し，それらの $w=f(z)$ による像をそれぞれ Γ_1, Γ_2 とする．



- C_1, C_2 の接ベクトルが z-平面の実軸正方向となす角を θ_1, θ_2，Γ_1, Γ_2 が w-平面の実軸正方向となす角を ϕ_1, ϕ_2 とする．このとき (12.1) より

$$\phi_1 = \arg f'(z_0) + \theta_i$$

したがって

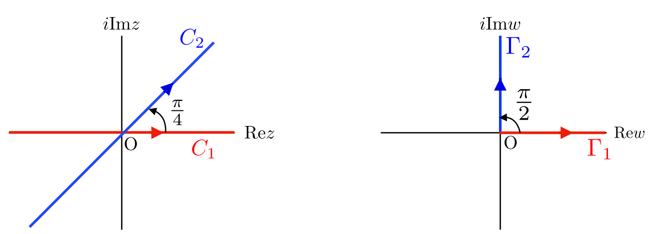
$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$$

- したがって z_0 において C_1 と C_2 がなす角 $\theta_2-\theta_1$ は $w_0(=f(z_0))$ において Γ_1 と Γ_2 がなす角 $\phi_2-\phi_1$ に向きを込めて等しい．□

注 $f'(z_0)=0$ の場合は一般に成り立たない．

例１

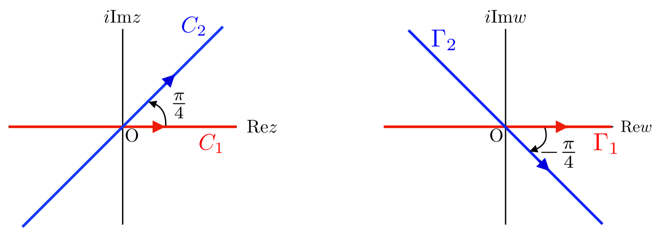
- $f(z)=z^2$ は $\mathbb{C}$ で正則だが $f'(0)=0$ である．$w=f(z)$ は 0 で等角ではない．
- C_1 を z-平面の実軸，C_2 を 0 と $1+i$ を結ぶ直線（$0\to 1+i$）とする．
- このとき C_1 の $w=f(z)$ による像 Γ_1 は w-平面の実軸（の右半分），C_2 の $w=f(z)$ による像 Γ_2 は w 平面の虚軸（の上半分）である．
- C_1 と C_2 のなす角は $\dfrac{\pi}{4}$，Γ_1 と Γ_2 のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ である．



例２

- $f(z)=\overline{z}$ を考える．

- C_1, C_2 は例 1 と同じとする．
- このとき C_1 の $w = f(z)$ による像 Γ_1 は w-平面の実軸，C_2 の $w = f(z)$ による像 Γ_2 は 0 と $1-i$ を結ぶ直線（$0 \to 1-i$）である．
- C_1 と C_2 のなす角は $\dfrac{\pi}{4}$，Γ_1 と Γ_2 のなす角は $-\dfrac{\pi}{4}$ であり，向きが異なる．



証明は省くが次が成り立つ．

定理 12.2

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする．$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ は D で C^1 級とする．$D \subset \mathbb{C}$ と見て $z = x + yi \in D$ に対し

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

とする．$w = f(z)$ が $z_0 \in D$ で等角ならば $f(z)$ は z_0 で微分可能で $f'(z_0) \neq 0$ が成り立つ．