6 共役空間と第2共役空間

6.1 共役空間

- $(X, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ 上のノルム空間とすると、 X 上の有界線形汎関数全体を X^* と書き X の**共役空間**というのであった。
- X^* は

$$\|f\|_{X^*} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \ (x \in X)\}$$

をノルムとして Banach 空間となるのであった。

- まず命題 4.6 から直ちに次のことがわかる。

定理 6.1

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $x \in X$ とする. 任意の $f \in X^*$ に対して $f(x) = 0$ ならば $x = o_X$ である.

証明 対偶を証明する. $x \neq o_X$ とすると命題 4.6 より

$$f(x) = \|x\|, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

となる $f \in X^*$ が存在する. このことは, $f(x) \neq 0$ なる $f \in X^*$ の存在を示しており対偶が示された. $\square$

- X の部分空間が X で稠密であるかを判定する命題を紹介する.
- その前に $Y \subset X$ を部分空間とするとき $\bar{Y}$ は閉部分空間となることを確認しよう. 閉であることは明らかであるので部分空間であることを示す.
- $x, y \in \bar{Y}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ とする. このとき $\{x_n\}, \{y_n\} \subset Y$ で

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty)$$

なるものが存在する. $x_n + y_n \in Y$ で $x_n + y_n \rightarrow x + y$ ($n \rightarrow \infty$) より $x + y \in \bar{Y}$ である. また $\alpha x_n \in Y$ で $\alpha x_n \rightarrow \alpha x$ ($n \rightarrow \infty$) より $\alpha x \in \bar{Y}$ である.

定理 6.2

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, Y を X の部分空間とする. Y が X で稠密でないならば, ある恒等的に 0 でない $f \in X^*$ で $f(x) = 0$ ($x \in Y$) を満たすものが存在する.

証明

- $\bar{Y}$ は X の閉部分空間であるので閉凸集合である.

- 仮定から $\bar{Y} \neq X$ より $x_0 \in X \setminus \bar{Y}$ なる x_0 をとる.
- $\{x_0\}$ はコンパクト集合より定理 5.9 よりある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\sup_{x \in \bar{Y}} \operatorname{Re} f(x) < \alpha < \operatorname{Re} f(x_0) \quad (6.1)$$

が成り立つ.

- 任意の $\lambda \in \mathbb{R}, x \in Y$ に対して

$$\lambda \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(\lambda f(x)) < \alpha$$

である. ここで $\beta = a + bi \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\operatorname{Re} \lambda \beta = \lambda \operatorname{Re} \beta$ であることを用いた.

- $\lambda > 0$ のとき (6.1) より

$$\operatorname{Re} f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}$$

$\lambda \rightarrow \infty$ として $\operatorname{Re} f(x) \leq 0$ である. 同様に $\lambda < 0$ のときから $\operatorname{Re} f(x) \geq 0$ を得る. 以上より $\operatorname{Re} f(x) = 0$ ($\forall x \in Y$) を得る.

- $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$ とおくと $f(x) = g(x) - ig(ix)$ である. $g(x) = 0$ ($\forall x \in Y$) であり, $ix \in Y$ ($x \in Y$) より $g(ix) = 0$ ($\forall x \in Y$) が成り立つ. したがって $f(x) = 0$ ($\forall x \in Y$) を得る. 一方 (6.1) より f は恒等的に 0 ではない. $\square$

系 6.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, Y を X の部分空間とする. Y 上で 0 となる $f \in X^*$ が X 上恒等的に 0 であるものに限られるならば Y は X で稠密である.

6.2 第 2 共役空間

- X^* は Banach 空間であるから X^* の共役空間 $(X^*)^*$ を考えることができる. これを X^{**} と書き X の **第 2 共役空間** という.
- $x \in X$ を固定するとき,

$$h_x(f) = f(x) \quad (6.2)$$

とおくと h_x は X^* 上の有界線形汎関数となる.

- まず線形汎関数であることを示そう. $f, g \in X^*$ に対して

$$h_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = h_x(f) + h_x(g)$$

が成り立つ. また $\alpha \in \mathbb{K}, f \in X^*$ に対して

$$h_x(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha h_x(f)$$

が成り立つ.

- 次に

$$|h_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\| = \|x\| \|f\|_{X^*}$$

であるから $h_x \in X^{**}$ であり,

$$\|h_x\|_{X^{**}} \leq \|x\| \tag{6.3}$$

が成り立つ.

- 次に Hahn-Banach の定理 (命題 4.7) より

$$\|h_x\|_{X^{**}} = \sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |h_x(f)| = \sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \|x\| \tag{6.4}$$

である.

- 次に $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ に対し

$$h_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = h_x(f) + h_y(f),$$

$$h_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha h_x(f)$$

が成り立つ. したがって $J: X \rightarrow X^{**}$ を $Jx = h_x$ とすると J は線形作用素である.

- また (6.3), (6.4) より $\|J\|_{\mathcal{L}(X, X^{**})} = 1$ であることがわかる.
- さらに $x, y \in X$ に対して $\|h_x - h_y\|_{X^{**}} = \|h_{x-y}\|_{X^{**}} = \|x - y\|$ が成り立つので J は 1 対 1 である.
- 以上をまとめよう.

定理 6.4

$(X, \|\cdot\|)$ ノルム空間とする. $x \in X$ に対して (6.2) で h_x を定義する. このとき

$$J: X \ni x \mapsto h_x \in X^{**}$$

で定義される作用素 J は有界線形作用素である. さらに

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|$$

が成り立つので J は 1 対 1 で $\|J\|_{\mathcal{L}(X, X^{**})} = 1$ が成り立つ.

注 JX は X^{**} の部分空間であるので上の定理から X は JX と **等長同型** であるということになる. そのため $x \in X$ は $Jx \in X^{**}$ と同一視できる. J を X から X^{**} への **標準的単射** あるいは **canonical 写像** などという.

定義

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とする. 定理 6.4 の J が全射であるとき, X は **回帰的 Banach 空間** あるいは **反射的 Banach 空間** であるという.

6.3 Hilbert 空間の場合

- H が $(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert 空間の場合を考える. Riesz の表現定理により, 任意の $f \in H^*$ に対して $f(x) = (x, x_f)$ ($\forall x \in H$) なる $x_f \in H$ がただ 1 つ存在し,

$$\|f\|_{H^*} = \|x_f\|$$

が成り立つ.

- $f, g \in H^*$ に対し $(f, g)_{H^*} = (x_g, x_f)$ と定めると H^* は内積により Hilbert 空間となる. まず内積であることを見よう.

(IP1) $(f, f)_{H^*} = (x_f, x_f) = \|x_f\|^2 \geq 0$ であり, $(f, f)_{H^*} = \|x_f\|^2 = 0$ ならば $x_f = o_H$ である. したがって $f = o_{H^*}$ である. 逆に $f = o_{H^*}$ ならば Riesz の表現定理により $x_f = o_H$ であり $\|f\|_{H^*} = \|o_H\| = 0$ が成り立つ.

(IP2) $f, g \in H^*$ に対して $(f, g)_{H^*} = (x_g, x_f) = \overline{(x_f, x_g)} = \overline{(g, f)_{H^*}}$ である.

(IP3) $f, g, h \in H^*, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} (f + g, h)_{H^*} &= (x_h, x_{f+g}) = (x_h, x_f + x_g) = (x_h, x_f) + (x_h, x_g) \\ &= (h, f)_{H^*} + (h, g)_{H^*} \end{aligned}$$

$$(\alpha f, h)_{H^*} = (x_h, x_{\alpha f}) = (x_h, \bar{\alpha} x_f) = \alpha (x_h, x_f) = \alpha (f, h)_{H^*}$$

である.

以上より内積であることがわかった. 完備であることは一般論から従う.

- H が反射的であることを示そう. 任意に $F \in H^{**}$ とすると, Riesz の表現定理より

$$F(f) = (f, f_F)_{H^*} \quad (f \in H^*), \quad \|F\|_{H^{**}} = \|f_F\|_{H^*}$$

となる $f_F \in H^*$ がただ 1 つ存在する. さらに Riesz の表現定理より

$$f_F(x) = (x, x_{f_F})_H \quad (x \in H), \quad \|x_{f_F}\|_H = \|f_F\|_{H^*}$$

となる $x_{f_F} \in H$ がただ 1 つ存在する.

- したがって

$$F(f) = (f, f_F)_{H^*} = (x_{f_F}, x_f)$$

が成り立つが, x_f の定義から $(x_{f_F}, x_f) = f(x_{f_F})$ ($f \in H^*$) が成り立つので

$$F(f) = f(x_{f_F}) \quad (f \in H^*)$$

となる. つまり $F = Jx_{f_F}$ である. したがって J は全射である.

命題 6.5

H を Hilbert 空間とすると, H は反射的 Banach 空間である.

7 弱収束と汎弱収束

7.1 弱収束

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

が成り立つことであり

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } X$$

とかくのであった. このとき $\{x_n\}$ は x に**強収束**するともいう.

- これに対し, $\{x_n\}$ が x に**弱収束**するとは, 任意の $f \in X^*$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

が成り立つことをいう. このとき

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } X, \quad x_n \overset{w}{\rightarrow} x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } X$$

などと表す.

- H が $(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert 空間のとき, 任意の $f \in H^*$ はある $x_f \in H$ を用いて $f(x) = (x, x_f)$ と表されるので, $x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } H$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y) \quad (\forall y \in H)$$

と同値である.

命題 7.1

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. $\{x_n\}$ が x および y に弱収束するならば $x = y$ である.

証明

- 仮定から任意の $f \in X^*$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ でありかつ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y)$ であるから $f(x) = f(y)$ である.
- したがって $f(x - y) = 0 \quad (\forall f \in X^*)$ が成り立つ.
- 定理 6.1 より $x - y = o_X$ つまり $x = y$ である. $\square$
- $\{x_n\}$ が x に弱収束するとき

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

と表す. このとき x を $\{x_n\}$ の**弱極限**という.

命題 7.2

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. $\{x_n\}$ が x に強収束するならば $\{x_n\}$ は x に弱収束する.

証明 $f \in X^*$ を任意にとると

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ が成り立つ. $\square$

命題 7.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. $\{x_n\}$ が x に弱収束するならば $\{\|x_n\|\}$ は有界な実数列であり

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

が成り立つ.

証明

- $f \in X^*$ に対して $T_n(f) = f(x_n)$, $T(f) = f(x)$ とおくと

$$|T_n(f)| \leq \|f\| \|x_n\|, \quad |T(f)| \leq \|f\| \|x\|$$

より $T_n, T \in X^{**}$ である.

- X^* は Banach 空間で各 $f \in X^*$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = T(f)$ であるから Banach-Steinhaus の定理 (定理 2.3) より

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X^{**}} < \infty$$

でありかつ

$$\|T\|_{X^{**}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X^{**}} \tag{7.1}$$

が成り立つ.

- また $T_n = Jx_n$, $T = Jx$ とかけるので 定理 6.4 より

$$\|T_n\|_{X^{**}} = \|Jx_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|, \quad \|T\|_{X^{**}} = \|x\|$$

が成り立つ. したがって $\{\|x_n\|\}$ は有界列である.

- 最後に (7.1) より

$$\|x\| = \|T\|_{X^{**}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X^{**}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

が成り立つ. $\square$

命題 7.4

H を $(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert 空間とする. $\{x_n\}$ が x に弱収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立つならば $\{x_n\}$ は x に強収束する.

証明

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x_n, x) + \|x\|^2$$

であり, 仮定から $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = (x, x) = \|x\|^2$ であるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, x) + \|x\|^2 = 0$$

である. $\square$

例 $H = l^2$ つまり $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ を満たす複素数列 $\mathbf{x} = \{x_n\}_n$ 全体とする. $\mathbf{x} = \{x_n\}_n, \mathbf{y} = \{y_n\}_n \in l^2$ に対して内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

で定義される. $\mathbf{e}_k = \{\delta_{kn}\}_n$ とする. つまり $\mathbf{e}_k$ は第 k 項は 1 でその他 0 である数列である. 明らかに $\mathbf{e}_k \in l^2$ ($k = 1, 2, \dots$) である. 任意の $\mathbf{x} = \{x_n\}_n \in l^2$ に対して $x_k = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) = \overline{(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})}$ で $|x_k| = |(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})|$ であり

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{e}_n, \mathbf{x})|^2 < \infty$$

である. 収束する級数の性質から $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{e}_n, \mathbf{x}) = 0$ が成り立つ. $\mathbf{x} \in l^2$ は任意であるから l^2 の点列 $\{\mathbf{e}_n\}$ は $\mathbf{0}$ つまり全ての項が 0 である数列に弱収束する. しかし

$$\|\mathbf{e}_n - \mathbf{0}\| = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

より強収束はしない.

7.2 弱収束と閉凸包

- X をベクトル空間とする. $x_1, \dots, x_N \in X$ に対して

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k x_k, \quad \left(\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right)$$

の形に表されるベクトルを $x_1, \dots, x_n$ の**凸結合**という.

補題 7.5

X をベクトル空間, C を X の空でない部分集合で凸集合であるとする. このとき 任意の $x_1, \dots, x_N \in C$ に対してこれらの凸結合は C の要素である.

証明 凸結合 $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N$ が C の要素であることを N に関する帰納法で示す.

- $N = 1$ のとき C の 1 個のベクトル x_1 の凸結合は x_1 自身であるので $N = 1$ のときは明らかに成り立つ.
- C の任意の N 個のベクトルの凸結合が C の要素であると仮定する. このとき C の任意の $N + 1$ 個のベクトル $x_1, \dots, x_N, x_{N+1}$ の凸結合

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1}$$

を考える. $\lambda_{N+1} = 0$ のときは帰納法の仮定からこれは C の要素である. $\lambda_{N+1} = 1$ のときは $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ より $N = 1$ の場合に帰着されるのでこの場合も C の要素である.

- $0 < \lambda_{N+1} < 1$ の場合を考える. このとき $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 - \lambda_{N+1}$ より $0 < \lambda_1 + \dots + \lambda_N < 1$ である.

$$\lambda(\lambda_1 + \dots + \lambda_N) = 1 \quad \text{つまり} \quad \lambda = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N}$$

とおくと $\lambda > 1$ である. 帰納法の仮定から

$$x := (\lambda \lambda_1) x_1 + \dots + (\lambda \lambda_N) x_N \in C$$

である (x は $x_1, \dots, x_N$ の凸結合である).

- C は凸であるから

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = \frac{1}{\lambda} x + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_{N+1} \in C$$

- 以上帰納法により任意の N 個の C のベクトルの凸結合は C の要素である. $\square$
- S を X の部分集合とすると S の有限個のベクトルの凸結合全体を S の凸包といい $\text{co}(S)$ とかく:

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k : N \in \mathbb{N}, x_k \in S, \lambda_k \geq 0 (k = 1, \dots, N), \sum_{k=1}^N \lambda_k = 1 \right\}$$

$\text{co}(S)$ は S を含む凸集合である (証明せよ).

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, S を X の空でない部分集合とすると $\text{co}(S)$ の閉包 $\overline{\text{co}(S)}$ を S の閉凸包といい, $\overline{\text{co}(S)}$ とも書く. 凸集合の閉包は凸集合であるので (証明せよ) $\overline{\text{co}(S)}$ は S を含む閉凸集合である.

- 実際 $\overline{\text{co}}(S)$ は S を含む最小の閉凸集合である。 C を S を含む閉凸集合とするとき $\overline{\text{co}}(S) \subset C$ を示せばよい。 $x \in \overline{\text{co}}(S)$ とすると $y_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) となる $\{y_n\} \subset \text{co}(S)$ が存在する。 したがって各 n に対して $N_n \in \mathbb{N}$ が存在して y_n は N_n 個の S の要素の凸結合で表される, つまり y_n は次のように表される:

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)} \quad \left(x_k^{(n)} \in S, \lambda_k^{(n)} \geq 0, \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^{(n)} = 1 \right)$$

- $S \subset C$ より y_n は C の N_n 個のベクトルの凸結合であるから補題 7.5 により $y_n \in C$ である。 一方 $y_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) で C は閉集合であるから $x \in C$ である。
- 以上で $\overline{\text{co}}(S) \subset C$ であり $\overline{\text{co}}(S)$ は S を含む閉凸集合で最小のものであることが示された。

命題 7.6(Mazur の補題)

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $\{x_n\}$ を X の点列で $x \in X$ に弱収束するとする。 このとき x は $S = \{x_n\}$ (集合として) の閉凸包の要素である。 いいかえると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ と $x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}$ の凸結合 $\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_k^{(\varepsilon)} x_k$ が存在して

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_k^{(\varepsilon)} x_k \right\| < \varepsilon$$

が成り立つ。

証明 もし $x \notin \overline{\text{co}}(S)$ とする。 このとき閉凸集合 $A := \overline{\text{co}}(S)$ とコンパクト凸集合 $B := \{x\}$ に関する Hahn-Banach の分離定理 (定理 5.6, 定理 5.9) より ($A \cap B = \emptyset$ は明らか), ある $f \in X^*$ が存在して

$$\text{Ref}(x_n) \leq \sup_{y \in A} \text{Ref}(y) < \inf_{z \in B} \text{Ref}(z) = \text{Ref}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つが, これは $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) に矛盾する。 $\square$

問 $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, C を空でない X の凸な部分集合とする。 このとき次の (i), (ii) は同値であることを示せ:

- (i) C は閉集合である。
- (ii) $\{x_n\} \subset C$ が x に弱収束するならば $x \in C$ である。

7.3 汎弱収束

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. このとき X^* は Banach 空間であるから X^* における弱収束を考えることができる. $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に弱収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(f_n) = F(f) \quad (\forall F \in X^{**})$$

が成り立つことである.

- X^* には弱収束の他にもう 1 つの収束が定義される. $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に汎弱収束あるいは * 弱収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つことである. このとき

$$x_n \xrightarrow{*} x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } X^*, \quad x_n \xrightarrow{w^*} x \quad (n \rightarrow \infty) \text{ in } X^*$$

と表す.

- 汎弱収束は X^* の弱収束より弱い条件である. つまり X^* において弱収束するならば汎弱収束する. 実際 $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X$ に弱収束するとする. $J: X \rightarrow X^{**}$ を 6 節で定義された標準的単射とすると任意の $x \in X$ に対して

$$f_n(x) = Jx(f_n) \rightarrow Jx(f) = f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

- 一般に上の事実の逆は成り立たないが X が反射的 Banach 空間であれば逆も成り立つ. 実際, $\{f_n\}$ が f に汎弱収束するとし, $F \in X^{**}$ を任意にとると, $F = Jx$ なる $x \in X$ がただ 1 つ存在する. したがって

$$F(f_n) = Jx(f_n) = f_n(x) \rightarrow f(x) = Jx(f) = F(f) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

命題 7.7

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. $\{f_n\} \subset X^*$ が f に汎弱収束し, かつ g に汎弱収束するならば $f = g$ である.

証明 $x \in X$ を任意にとると仮定から $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ でありかつ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ であるから $f(x) = g(x)$ が成り立つ. $x \in X$ は任意なのでこれは X^* の元として $f = g$ であることを意味する. $\square$

- $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に汎弱収束するとき

$$w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

などと表す.

命題 7.8

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とする. $\{f_n\} \subset X^*$ が f に汎弱収束するとき, $\{\|f_n\|_{X^*}\}$ は有界で

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{X^*}$$

が成り立つ.

証明 Banach-Steinhaus の定理 (定理 2.3) より明らかである. $\square$

命題 7.9

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし $\{f_n\} \subset X^*$ とする. 任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるならば $\{f_n\}$ はある $f \in X^*$ に汎弱収束する.

証明

- 任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であるので収束する.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ とすれば f は X 上の線形汎関数である (証明せよ).
- Banach-Steinhaus の定理 (定理 2.3) より $f \in X^*$ である. したがって $\{f_n\}$ は f に汎弱収束する. $\square$

注 命題 7.9 の事実を「 X^* は * 弱完備である」という.

命題 7.10

$(X, \|\cdot\|)$ を反射的 Banach 空間とし $\{x_n\} \subset X$ とする. このとき任意の $f \in X^*$ に対して $\{f(x_n)\}$ が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるならば $\{x_n\}$ はある $x \in X$ に弱収束する.

証明

- $J: X \rightarrow X^{**}$ を標準的単射とする. このとき任意の $f \in X^*$ に対して

$$f(x_n) = Jx_n(f)$$

である.

- 任意の $f \in X^*$ に対して $\{Jx_n(f)\}$ は Cauchy 列であるから命題 7.9 より $\{Jx_n\} \subset (X^*)^*$ はある $F \in (X^*)^*$ に汎弱収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Jx_n(f) = F(f) \quad (\forall f \in X^*)$$

- X は反射的 Banach 空間であるから $Jx = F$ となる $x \in X$ が存在する. したがって

$$f(x_n) = Jx_n(f) \rightarrow F(f) = Jx(f) = f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. これは $\{x_n\}$ が x に弱収束することを意味する.

注 命題 7.10 の事実を「反射的 Banach 空間は**弱完備**である」という。

- 最後に弱収束・汎弱収束に基づいたコンパクト性に関する応用上極めて重要な事実を述べる。「可分な」Banach 空間という条件のもとで証明するため、まず可分という条件を述べよう。

定義

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする。 X の部分集合で可算でありかつ稠密であるものが存在するとき X は**可分** (separable) であるという。

例 絶対値を備えた $\mathbb{R}$ は稠密な可算集合 $\mathbb{Q}$ をもつので可分である。

例 Weierstrass の多項式近似定理により $C([0, 1])$ は可分である (証明は略)。

命題 7.11

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする。 X^* が可分であれば X の可分である。

証明

- X^* は可分なので、稠密な可算集合 $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ が存在する。
- X^* のノルムの公式: $\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_n(x)|$ より、各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|, \quad \|x_n\| \leq 1 \quad (7.2)$$

となる $x_n \in X$ が存在する。

- $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ で生成される部分空間を M とする:

$$M := \overline{\{y \in X : y = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n \ (\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C})\}}$$

このとき M は稠密な可算集合を含む、実際

$$\{y \in X : y = (\alpha_1 + i\beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)x_n \ (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q})\}$$

は M で稠密である (証明せよ)。

- $X = M$ ならば証明が終わる。 $X \neq M$ とすると、定理 6.2 より

$$f(x) = 0 \quad (x \in M)$$

なる恒等的に 0 でない $f \in X^*$ が存在する。

- $f(x_n) = 0 \ (n = 1, 2, \dots)$ である。
- $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ は X^* で稠密であるから $\{f_{n_k}\} \subset S$ で

$$\|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となるものが存在する。

- しかし X^* のノルムの定義と (7.2) より

$$\|f_{n_k} - f\| \geq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| = |f_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|f_{n_k}\|$$

であるから $\|f_{n_k}\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) である.

- したがって $\|f\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k}\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) であるから $\|f\| = 0$ つまり $f = 0$ である. これは f が恒等的に 0 でないことに反する.
- 以上より $X = M$ となり X は可分である. $\square$

定理 7.12 (Banach-Alaoglu の定理)

$(X, \|\cdot\|)$ を可分なノルム空間とし $\{f_n\} \subset X^*$ は有界, つまりある $M > 0$ が存在して $\|f_n\|_{X^*} \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$) が成り立つとする. このとき $\{f_n\}$ は汎弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在する.

注 可分でなくても成り立つが, 証明を簡単にするために可分の場合のみ示す.

証明 (Ascoli-Arzelà の定理の前半の証明を思い出してみよう)

- $x \in X$ を任意にとると

$$|f_n(x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\| \leq M \|x\| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (7.3)$$

が成り立つので任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ は有界 (数) 列である.

- X は可分なので稠密な可算部分集合 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ が存在する.
- $\{f_n(x_1)\}$ は有界であるので Bolzano-Weierstrass の定理により, ある自然数の単調増加列 $\{n_1(k)\}_k$ が存在して $\{f_{n_1(k)}(x_1)\}_k$ は収束する: $\{f_{n_1(k)}(x)\}$ は $x = x_1$ で収束する.
- $\{f_{n_1(k)}(x_2)\}_k$ は有界であるので Bolzano-Weierstrass の定理により, $\{n_1(k)\}_k$ の部分列 $\{n_2(k)\}_k$ が存在して $\{f_{n_2(k)}(x_2)\}_k$ は収束する: $\{f_{n_2(k)}(x)\}$ は $x = x_1, x_2$ で収束する.
- 自然数の単調増加列 $\{n_j(k)\}_k$ に対して $\{f_{n_j(k)}(x)\}$ が $x = x_1, x_2, \dots, x_j$ で収束するとする. このとき $\{f_{n_j(k)}(x_{j+1})\}_k$ は有界であるので $\{n_j(k)\}_k$ の部分列 $\{n_{j+1}(k)\}_k$ が存在して $\{f_{n_{j+1}(k)}(x_{j+1})\}_k$ は収束する: $\{f_{n_{j+1}(k)}(x)\}$ は $x = x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}$ で収束する.
- 自然数列 $n(k) = n_k(k)$ とすると $n(k)$ は単調増加列である. 実際 $\{n_{j+1}(k)\}_k$ は $\{n_j(k)\}_k$ の部分列であるから $n_{j+1}(j+1) \geq n_j(j+1) > n_j(j)$ である.
- このとき $\{f_{n(k)}(x)\}$ は任意の $x \in S$ で収束する. 実際, $x = x_j$ とすると $\{n(k)\}_{k \geq j} \subset \{n_j(k)\}_k$ であるからである.

- 最後に $\{f_{n(k)}(x)\}$ は全ての $x \in X$ で収束することを示す. そのためには $\{f_{n(k)}(x)\}$ が Cauchy 列であることを示さばよい. 任意に $x \in X$ と任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき S は稠密だから $\|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ となる $x_j \in S$ が存在する.
- $\{f_{n(k)}(x_j)\}_k$ は収束するので Cauchy 列である. したがってある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow |f_{n(k)}(x_j) - f_{n(l)}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ (k_0 は ε と x のみから定まっていることに注意).

- したがって $k, l \geq k_0$ ならば

$$\begin{aligned} |f_{n(k)}(x) - f_{n(l)}(x)| &\leq |f_{n(k)}(x) - f_{n(k)}(x_j)| + |f_{n(k)}(x_j) - f_{n(l)}(x_j)| \\ &\quad + |f_{n(l)}(x_j) - f_{n(l)}(x)| \\ &< \|f_{n(k)}\|_{X^*} \|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n(k)}\|_{X^*} \|x_j - x\| \quad (7.4) \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. これは $\{f_{n(k)}(x)\}$ が Cauchy 列であることを意味する. $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}(x)$ とおく. $f \in X^*$ であり $\{f_{n(k)}\}$ が f に汎弱収束することを見よう.

- (7.3) より $|f_{n(k)}(x)| \leq M\|x\|$ ($x \in X, k \in \mathbb{N}$) が成り立つので $k \rightarrow \infty$ として $|f(x)| \leq M\|x\|$ が成り立つ. これより $f \in X^*$ である.
- 次に (7.4) で $l \rightarrow \infty$ とすると $k \geq k_0$ ならば

$$|f_{n(k)}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ. これは $\{f_{n(k)}(x)\}$ が $f(x)$ に収束することを意味する. $x \in X$ は任意だったので $\{f_{n(k)}\}$ は f に汎弱収束する. $\square$

注 この事実は「 X^* の単位球は *弱コンパクト」であるといわれる.

- 次の事実は非常によく用いられる.

系 7.13

$(X, \|\cdot\|)$ を可分な反射的 Banach 空間とし $\{x_n\} \subset X$ は有界, つまりある $M > 0$ が存在して $\|x_n\|_X \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$) が成り立つとする. このとき $\{x_n\}$ は弱収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する.

証明

- $J: X \rightarrow X^{**}$ を標準的単射とする.

- $\{x_n\} \subset X$ を有界列とすると定理 6.4 より $\|Jx_n\|_{(X^*)^*} = \|x_n\|$ が成り立つので $\{Jx_n\} \subset (X^*)^*$ は有界列である.
- 今, X は可分であるから X^{**} も可分である. よって命題 7.11 より X^* も可分である.
- したがって Banach-Alaoglu の定理 (定理 7.12) より $\{Jx_n\}$ はある $F \in (X^*)^*$ に汎弱収束する部分列 $\{Jx_{n_k}\}$ が存在する.
- X は反射的 Banach 空間であるから $Jx = F$ となる $x \in X$ が存在する. したがって任意の $f \in X^*$ に対して

$$f(x_{n_k}) = Jx_{n_k}(f) \rightarrow F(f) = Jx(f) = f(x) \quad (k \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. これは $\{x_{n_k}\}$ が x に弱収束することを意味する. $\square$

注 この事実は「反射的 Banach 空間の単位球は**弱コンパクト**である」という.

命題 7.14

$(X, \|\cdot\|)$ を可分な反射的 Banach 空間, $C \subset X$ を空でない閉凸集合とする. このとき任意の $x \in X$ に対し,

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \text{dist}(x, C)$$

となる $y \in X$ が存在する.

注 上のような y は一意とは限らない. X が Hilbert 空間であれば一意である.

証明

- inf の定義から $\{y_n\} \subset C$, $\|x - y_n\| \rightarrow \text{dist}(x, C)$ ($n \rightarrow \infty$) となる $\{y_n\}$ が存在する.
- $\varepsilon = 1$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $\|x - y_n\| \leq \text{dist}(x, C) + 1$ が成り立つ. よって $n \geq n_0$ ならば

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| \leq \text{dist}(x, C) + 1 + \|x\|$$

である. したがって $\{y_n\}$ は有界である.

- 系 7.12 より $\{y_n\}$ は弱収束する部分列 $\{y_{n_k}\}$ をもつ. $y_{n_k} \rightharpoonup y$ ($k \rightarrow \infty$) とすると p.46 の問より $y \in C$ である. 当然 $x - y_{n_k} \rightharpoonup x - y$ ($k \rightarrow \infty$) である.
- したがって命題 7.3 より

$$\|x - y\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x - y_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_{n_k}\| = \text{dist}(x, C)$$

である. 一方 $\text{dist}(x, C) \leq \|x - y\|$ より $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$ が成り立つ. $\square$