

4 Hahn-Banach の定理 1

4.1 Hahn-Banach の定理 (実係数)

- Hahn-Banach の定理はベクトル空間の部分空間で定義された線形汎関数を一定の性質を保ったまま全体へ拡張するために用いられる定理である.
- Hahn-Banach の定理の主張をまず述べよう.

定理 4.1 (Hahn-Banach の定理 (実係数))

X を実ベクトル空間, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ を次の (i), (ii) を満たす汎関数とする:

$$(i) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$$

$$(ii) \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (x \in X, \lambda \geq 0)$$

$L \subset X$ を部分空間 $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ を線形汎関数とし,

$$f(x) \leq p(x) \quad (x \in L)$$

を満たすものとする. このとき線形汎関数 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$

$$F(x) \leq p(x) \quad (x \in X)$$

を満たすものが存在する.

- 証明の前に応用例を示そう.

命題 4.2

$(X, \|\cdot\|_X)$ を実ノルム空間, $L \subset X$ を部分空間とする ($(L, \|\cdot\|_X)$ もノルム空間となる). $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ を有界線形汎関数とすると, ある有界線形汎関数 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

が成り立つ.

証明

- $p(x) = \|f\|_{L^*}\|x\|_X$ とおくと $p(x)$ は定理 4.1 の条件 (i), (ii) を満たす.
- また作用素ノルムの定義から $|f(x)| \leq \|f\|_{L^*}\|x\|_X = p(x) \quad (x \in L)$ が成り立つ.

- したがって定理 4.1 よりある有界線形汎関数 $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L) \quad (4.1)$$

$$F(x) \leq p(x) \quad (x \in X) \quad (4.2)$$

が成り立つ.

- $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$ を示そう. まず, (4.2) で $\pm x$ を考えることにより

$$|F(x)| \leq \|f\|_{L^*} \|x\|_X \quad (x \in X)$$

が成り立つ. 作用素ノルムの定義から $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{L^*}$ を得る.

- 一方, F は X 上の有界線形汎関数なので

$$|F(x)| \leq \|F\|_{X^*} \|x\|_X \quad (x \in X)$$

が成り立つが, (4.1) より

$$|f(x)| \leq \|F\|_{X^*} \|x\|_X \quad (x \in L)$$

が成り立つ. 作用素ノルムの定義により $\|f\|_{L^*} \leq \|F\|_{X^*}$ を得る. $\square$

命題 4.3

$(X, \|\cdot\|_X)$ を実ノルム空間, $x_0 \in X$ ($x_0 \neq o_X$) とする. このとき, ある有界線形汎関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$f(x_0) = \|x_0\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

となるものが存在する.

証明

- $L = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ とおくと L は X の部分空間である.
- $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(tx_0) = t\|x_0\|_X$$

で定めると

$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|_X = \|tx_0\|_X$$

より g は L 上の有界線形汎関数であり $\|g\|_{L^*} \leq 1$ である.

- さらに

$$\frac{|g(x_0)|}{\|x_0\|_X} = 1$$

より $\|g\|_{L^*} = 1$ を得る.

- したがって命題 4.2 より, ある有界線形汎関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$f(x) = g(x) \quad (x \in L), \quad \|f\|_{X^*} = \|g\|_{L^*} = 1$$

となるものが存在する. $\square$

4.2 Hahn-Banach の定理 (複素形)

- Hahn-Banach の定理は複素ベクトル空間に場合に拡張される.

定理 4.4 (Hahn-Banach の定理 (複素係数))

X を複素ベクトル空間, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ を次の (i), (ii) を満たす非負値汎関数とする:

$$(i) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$$

$$(ii) \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{C})$$

$L \subset X$ を部分空間 $f: L \rightarrow \mathbb{C}$ を線形汎関数とし,

$$|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in L) \tag{4.3}$$

を満たすものとする. このとき線形汎関数 $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$

$$|F(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$$

を満たすものが存在する.

証明

- $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $h(x) = \operatorname{Im} f(x)$ とおくと

$$f(x) = g(x) + ih(x) \quad (x \in L)$$

と表される.

- $f(ix) = if(x)$ より $g(ix) + ih(ix) = -h(x) + ig(x)$ であるため,

$$h(x) = -g(ix) \quad \text{つまり} \quad f(x) = g(x) - ig(ix) \quad (x \in L) \tag{4.4}$$

が成り立つことに注意する.

- $p(x)$ は X を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみたとき ($X_{\mathbb{R}}$ とかくことにすると) 定理 4.1 の $p(x)$ の条件 (i), (ii) を満たす.
- g, h はそれぞれ $L_{\mathbb{R}}$ 上の線形汎関数であり, (4.3) より,

$$g(x) \leq p(x) \quad (x \in L)$$

を満たす¹.

¹ $X_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}$ は X, L と集合としては同じであることに注意せよ. 違いは線形汎関数を考えるとき $L_{\mathbb{R}}$ 上の線形汎関数 g は $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ が $x \in L$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ.

- 定理 4.1 より, $X_{\mathbb{R}}$ 上で定義された線形汎関数 $G : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} G(x) &= g(x) \quad (x \in L) \\ G(x) &\leq p(x) \quad (x \in X) \end{aligned} \tag{4.5}$$

が成り立つ. $-G(x) = G(-x) \leq p(-x) = p(x)$ より

$$|G(x)| \leq p(x) \quad (x \in X) \tag{4.6}$$

が成り立つ.

$$F(x) = G(x) - iG(ix)$$

とおくと $x \in L$ のとき $ix \in L$ であるから (4.4), (4.5) により

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = f(x)$$

が成り立つ. つまり F は f の X への拡張である.

- $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ が線形汎関数であることを示そう.
- $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &= G(x_1 + x_2) - iG(i(x_1 + x_2)) \\ &= G(x_1) + G(x_2) - i(G(ix_1 + ix_2)) \\ &= G(x_1) + G(x_2) - i(G(ix_1) + G(ix_2)) \\ &= (G(x_1) - iG(ix_1)) + (G(x_2) - iG(ix_2)) \\ &= F(x_1) + F(x_2) \end{aligned}$$

が成り立つ.

- $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ のときは

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= G(\lambda x) - iG(i(\lambda x)) = G(\lambda x) - iG(\lambda(ix)) \\ &= \lambda G(x) - \lambda iG(ix) = \lambda F(x) \end{aligned}$$

が成り立つ.

- $x \in X$ に対して

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = G(ix) + iG(x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$$

であるから $x \in X, a + bi \in \mathbb{C}$ に対しては

$$\begin{aligned} F((a + bi)x) &= F(ax + b(ix)) = F(ax) + F(b(ix)) \\ &= aF(x) + bF(ix) \\ &= aF(x) + biF(x) = (a + bi)F(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上により $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ は線形汎関数であることがわかった.

- 最後に $|F(x)| \leq p(x)$ を満たすことについては $F(x)$ を極形式を用いて $F(x) = re^{i\theta}$ と表すと $e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}$ であるので $F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$ である。 よって

$$|F(x)| = |e^{-i\theta}F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

を得る。 $\square$

- 命題 4.2, 命題 4.3 は複素ノルム空間の場合に対しても成り立つ。

命題 4.5

$(X, \|\cdot\|_X)$ を複素ノルム空間, $L \subset X$ を部分空間とする ($(L, \|\cdot\|_X)$ もノルム空間となる)。 $f: L \rightarrow \mathbb{C}$ を有界線形汎関数とすると, ある有界線形汎関数 $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

が成り立つ。

命題 4.6

$(X, \|\cdot\|_X)$ を複素ノルム空間, $x_0 \in X (x_0 \neq o_X)$ とする。 このとき, ある有界線形汎関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$f(x_0) = \|x_0\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

となるものが存在する。

- 次が成り立つ。

命題 4.7

$(X, \|\cdot\|_X)$ をノルム空間とする。 任意の $x \in X$ に対し

$$\|x\|_X = \sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)|$$

が成り立つ。

証明

- $\|f\|_{X^*} \leq 1$ とすると $|f(x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \leq \|x\|_X$ であるので

$$\sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_X$$

が成り立つ。

- 命題 4.6 より, ある $g \in X^*$ で $g(x) = \|x\|_X$, $\|g\|_{X^*} = 1$ となるものが存在する. したがって

$$\sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \|x\|_X$$

が成り立つ (sup は上の g で達成されるので max となる). $\square$

4.3 全順序集合と Zorn の補題

- 一般に扱うベクトル空間は無限次元空間であるため, 拡張には超限帰納法が必要となる.
- 準備として順序集合・全順序集合・Zorn の補題についてまとめておく.

定義 (順序集合)

S を空でない集合とし, 任意の $x, y \in S$ に対して $x \prec y$ であるかそうでないかが定まっていて, 次の (i)~(iii) を満たすとき $\prec$ を **(半) 順序** といい $(S, \prec)$ あるいは単に S を **(半) 順序集合** という:

- (i) $x \prec x$ **(反射律)**
- (ii) $x \prec y, y \prec x$ ならば $x = y$ **(反対称律)**
- (iii) $x \prec y, y \prec z$ ならば $x \prec z$ **(推移律)**

定義 (全順序集合)

- (半) 順序集合 $(S, \prec)$ において, 任意の $x, y \in S$ に対し $x \prec y$ または $y \prec x$ が必ず成り立つとき $\prec$ は**全順序**であるといい $(S, \prec)$ は**全順序集合**であるという.
- $(S, \prec)$ を半順序集合, $S_0 \subset S$ とする. $(S_0, \prec)$ が全順序集合となるとき, S_0 を S の**全順序部分集合**という.

例 1 $\mathbb{R}$ は $\leq$ を順序とする全順序集合である. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ は全順序部分集合である.

例 2 X を空でない集合とし, $S = 2^X$ つまり X の部分集合全体とする. $A, B \in 2^X$ に対し $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$ とすると $\prec$ は順序であるが全順序ではない.

例 3 $S = C([0, 1])$ を $[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体とする. $u, v \in C([0, 1])$ において

$$u \prec v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x) \quad (x \in [0, 1])$$

とすると順序であるが全順序ではない. 一方 $u \in C([0, 1])$ を $u(x) \geq 0$ ($x \in [0, 1]$) とし, $S_0 = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$ とすると S_0 は S の全順序部分集合である.

定義（上界・極大元）

$(S, \prec)$ を順序集合とする.

- $S_0 \subset S$ とする. $b \in S$ が S_0 の**上界**であるとは, 任意の $a \in S_0$ に対して $a \prec b$ が成り立つことである.
- $b \in S$ が S の**極大元**であるとは, $b \prec c, c \in S \Rightarrow b = c$ が成り立つことである.

定義（帰納的順序集合）

$(S, \prec)$ を順序集合とする. S の任意の空でない全順序部分集合が S に上界をもつとき, $(S, \prec)$ は**帰納的順序集合**という.

Zorn の補題

$(S, \prec)$ を帰納的順序集合とすると, S は極大元をもつ.

- Zorn の補題は選択公理と同値であることが知られているが, ここでは深く触れない.

4.4 Hahn-Banach の定理の証明

- Zorn の補題を用いて Hahn-Banach の定理を証明しよう. 証明は 2 段にわたるが, Zorn の補題を用いるのは Step 2 である.

定理 4.1 の証明

Step 1: $L \neq X$ ならば, $L \subset L_1, L \neq L_1$ なる X の部分空間 L_1 と, L_1 上の線形汎関数 f_1 が存在し

$$f_1(x) = f(x) \quad x \in L, \quad (4.7)$$

$$f_1(x) \leq p(x) \quad x \in L_1 \quad (4.8)$$

が成り立つことを示す.

- $L \neq X$ とすると $x_0 \in X \setminus L$ なる x_0 が存在する. L_1 を

$$L_1 = \{y + tx_0 : y \in L, t \in \mathbb{R}\}$$

とおくと L_1 は $L \subset L_1$ を満たす X の部分空間である.

- L_1 の元は $y + tx_0$ ($y \in L, t \in \mathbb{R}$) とただ 1 通りに表される. 実際, $y_1 + tx_0 = y_2 + sx_0$ ($y_1, y_2 \in L, t, s \in \mathbb{R}$) とする. $t \neq s$ とすると $x_0 = (s-t)^{-1}(y_1 - y_2) \in L$ となるので矛盾. したがって $t = s$ であり, さらに $y_1 = y_2$ を得る.

- L_1 上の線形汎関数 f_1 を

$$f_1(x) = f(y) + tc \quad (x = y + tx_0 \in L_1)$$

と定義する. f_1 は (4.7) を満たす. c は (4.8) を満たすように後で定める. まず f_1 が線形汎関数であることを示そう.

- $x_1, x_2 \in L_1, x_1 = y_1 + t_1x_0, x_2 = y_2 + t_2x_0$ ($y_1, y_2 \in L, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$), $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき

$$x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (t_1 + t_2)x_0 \quad (y_1 + y_2 \in L),$$

$$\alpha x_1 = \alpha y_1 + (\alpha t_1)x_0 \quad (\alpha y_1 \in L),$$

$$f_1(x_1) = f(y_1) + t_1c, \quad f_1(x_2) = f(y_2) + t_2c$$

より

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + x_2) &= f(y_1 + y_2) + (t_1 + t_2)c = (f(y_1) + t_1c) + (f(y_2) + t_2c) \\ &= f_1(x_1) + f_1(x_2) \end{aligned}$$

$$f_1(\alpha x_1) = f(\alpha y_1) + \alpha t_1c = \alpha f(y_1) + \alpha(t_1c) = \alpha f_1(x_1)$$

である. したがって f_1 は L_1 上の線形汎関数である.

- c を (4.8) を満たすように定めよう. そのために c を適当に定めれば

$$\begin{aligned} f(y) + c &\leq p(y + x_0) \quad (\forall y \in L) \\ f(y) - c &\leq p(y - x_0) \quad (\forall y \in L) \end{aligned} \tag{4.9}$$

が成り立つことをいう. 実際 $y, y' \in L$ に対して

$$\begin{aligned} f(y) + f(y') &= f(y + y') \leq p(y + y') \\ &= p(y + x_0 + y' - x_0) \leq p(y + x_0) + p(y' - x_0), \end{aligned}$$

より

$$f(y') - p(y' - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y)$$

が成り立つ. したがって

$$\beta_1 := \sup_{y' \in L} \{f(y') - p(y' - x_0)\} < \infty$$

$$\beta_2 := \inf_{y \in L} \{p(y + x_0) - f(y)\} > -\infty$$

$$\beta_1 \leq \beta_2$$

であり, $\beta_1 \leq c \leq \beta_2$ を満たすようにとれば (4.9) が成り立つ.

- このように c をとれば (4.8) が成り立つ. 実際, $x = y + tx_0 \in L_1$ ($y \in L$, $t \in \mathbb{R}$) とすると $t = 0$ のときは

$$f_1(x) = f(y) \leq p(y) = p(x)$$

である. $t > 0$ のときは (4.9) より

$$f_1(x) = f(y) + tc = t \{f(t^{-1}y) + c\} \leq tp(t^{-1}y + x_0) = p(y + tx_0) = p(x)$$

である. $t < 0$ のときは (4.9) より

$$\begin{aligned} f_1(x) = f(y) + tc &= (-t) \{f((-t)^{-1}y) - c\} \leq (-t)p((-t)^{-1}y - x_0) \\ &= p(y + tx_0) = p(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上で Step 1 の証明が完了する.

Step 2: 定理のような F を構成する.

- 集合 S を, X の部分空間 L_g で定義された線形汎関数 $g: L_g \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad (x \in L), \\ g(x) &\leq p(x) \quad (x \in L_g) \end{aligned}$$

を満たすもの全体とし, S に順序 $\prec$ を次のように定める:

$$g_1 \prec g_2 \Leftrightarrow L_{g_1} \subset L_{g_2} \text{ かつ } g_2(x) = g_1(x) \quad (x \in L_{g_1})$$

このとき S は上で定めた $\prec$ に関して順序集合である.

- S の全順序部分集合 $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる. これが S に上界をもつことを示そう.
 $L_{g_\lambda} = L_\lambda$ と書くことにする.

$$L_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$$

とすると L_0 は X の部分空間である. L_0 がスカラー倍については閉じていること明らか. 和については $x_1, x_2 \in L_0$ とすると $x_1 \in L_{\lambda_1}, x_2 \in L_{\lambda_2}$ となる λ_1, λ_2 が存在する. $\{g_\lambda\}$ は全順序集合であることから $L_{\lambda_1} \subset L_{\lambda_2}$ あるいは $L_{\lambda_2} \subset L_{\lambda_1}$ が成り立つので, 例えば前者とすれば $x_1 + x_2 \in L_{\lambda_2} \subset L_0$ である.

- L_0 上の線形汎関数 g_0 を次のように定める. $x \in L_0$ とすると $x \in L_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ がとれるので $g_0(x) = g_\lambda(x)$ と定める. これは λ の取り方によらない, 実際 $x \in L_{\lambda_1}$ かつ $x \in L_{\lambda_2}$ とすると $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は全順序集合より $g_1 \prec g_2$ あるいは $g_2 \prec g_1$ が成り立つ. 前者とすると $L_{\lambda_1} \subset L_{\lambda_2}, g_{\lambda_2}(x) = g_{\lambda_1}(x)$ ($x \in L_{\lambda_1}$) であるので g_0 は λ の選び方によらない.

- 次に g_0 が L_0 上の線形汎関数であることを示そう. $x_1, x_2 \in L_0, \alpha \in \mathbb{R}$ とすると $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が全順序集合であることから $x_1, x_2 \in L_\lambda$ となる λ があるので $x_1 + x_2 \in L_\lambda$ であり

$$g_0(x_1 + x_2) = g_\lambda(x_1 + x_2) = g_\lambda(x_1) + g_\lambda(x_2) = g_0(x_1) + g_0(x_2)$$

である. また $\alpha x_1 \in L_\lambda$ であるから

$$g_0(\alpha x_1) = g_\lambda(\alpha x_1) = \alpha g_\lambda(x_1) = \alpha g_0(x_1)$$

が成り立つ.

- 次に $g_0(x) = f(x)$ ($x \in L$) を示そう. $x \in L$ とすると, $x \in L_\lambda$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) より $g_0(x) = g_\lambda(x)$ であるが $g_\lambda \in \mathcal{S}$, $x \in L$ より $g_\lambda(x) = f(x)$ である.
- 最後に $g_0(x) \leq p(x)$ ($x \in L_0$) を示そう. $x \in L_0$ とすると $x \in L_\lambda$ となる λ があり $g_\lambda \in \mathcal{S}$ より $g_0(x) = g_\lambda(x) \leq p(x)$ が成り立つ.
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $L_\lambda \subset L_0$ であり $g_0(x) = g_\lambda(x)$ ($\lambda \in \Lambda$) であるから, $g_\lambda \prec g_0$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) である, つまり g_0 は $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の上界である. したがって $\mathcal{S}$ の任意の空でない全順序部分集合は $\mathcal{S}$ に上界をもつことがわかった. つまり $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である.
- Zorn の補題より $\mathcal{S}$ は極大限 F をもつことになる. F の定義域は X 全体である. そうでなければ Step 1 より F はさらに拡張でき, F が極大元であることに反する. $\square$

5 Hahn-Banach の定理 2

- この節では Hahn-Banach の定理の幾何学的な側面である Hahn-Banach の分離定理について述べる.

5.1 超平面・凸集合・Minkowski 汎関数

- X は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. X 上の恒等的に 0 でない線形汎関数 f とスカラー α を用いて

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

と表される集合を**超平面**という.

命題 5.1

$(X, \|\cdot\|_X)$ をノルム空間とする. 超平面

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

が閉であるための必要十分条件は f が連続であることである.

証明 (宮島静雄著「関数解析」を参考にした).

- f が連続であれば H が閉集合であることは $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ と表されることから明らかである.
- H が閉集合であるとする.
- $x_0 \in H$ を任意にとると $H = x_0 + \text{Ker} f = \{x_0 + y : f(y) = 0\}$ と表される.
- 平行移動に関して閉集合であるという事実は変わらないので $x + \text{Ker} f$ は任意の $x \in X$ に対して閉集合である.
- f は恒等的に 0 ではないので $f(x) \neq 0$ となる x をとり $\lambda = f(x)$ とおくと $z = (\bar{\lambda}/|\lambda|^2)x$ は $f(z) = 1$ を満たす. これより $f^{-1}(\{1\}) = z + \text{Ker} f$ と表される.
- $o_X \notin f^{-1}(\{1\})$ であり $f^{-1}(\{1\})$ は閉集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$B_\varepsilon(o_X) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset \quad (5.1)$$

が成り立つ.

- 次に

$$x \in B_\varepsilon(o_X) \Rightarrow |f(x)| < 1 \quad (5.2)$$

を示す.

- もしある $x \in B_\varepsilon(o_X)$ に対して $|f(x)| \geq 1$ が成り立つとする. $f(x) = re^{i\theta}$ とおき $y = e^{-i\theta}x \in B_\varepsilon(o_X)$ とおくと $f(y) \in \mathbb{R}$ で $f(y) \geq 1$ となる.
- このとき $\tilde{y} = \frac{y}{f(y)} \in B_\varepsilon(o_X)$ であるが $f(\tilde{y}) = 1$ となりこれは (5.1) に反する.
- 最後に (5.2) より

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|x\| \quad (5.3)$$

を示す. $x = o_X$ ならば明らか. $x \neq o_X$ のとき $y = \frac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ とおくと $\|y\| < \varepsilon$ であるから (5.2) より $|f(y)| < 1$ である. これを変形すると (5.3) を得る. $\square$

定義

X をベクトル空間, $A \subset X$ を空でないとする. A が**吸収的**であるとは

$$X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A = \{\lambda x : \lambda > 0, x \in A\}$$

が成り立つことをいう.

- つまり, 任意の $x \in X$ に対して, $x \in \lambda A$ つまり $\lambda^{-1}x \in A$ となる $\lambda > 0$ が存在することをいう. A が吸収的であれば $o_X \in A$ である. 実際, 吸収的の定義から $\lambda^{-1}o_X \in A$ なる $\lambda > 0$ が存在するからである.
- 例えば $(X, \|\cdot\|)$ がノルム空間で A が o_X を内点にもてば吸収的である. 実際, $B_\varepsilon(o_X) \subset A$ なる $\varepsilon > 0$ が存在する. 任意の $x \in X$ に対し, $x = o_X$ ならば任意の $\lambda > 0$ に対し $\lambda^{-1}x = o_X \in A$ である. $x \neq o_X$ ならば $\left(\frac{2\|x\|}{\varepsilon}\right)^{-1} x \in B_\varepsilon(o_X) \subset A$ である.
- A が吸収的であるとき $x \in X$ に対し $\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in A\}$ は空集合でなく, さらに下に有界である. 従って下限が存在するのでそれを $p_A(x)$ とおく:

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in A\}$$

$p_A(x)$ を A の **Minkowski 汎関数** という.

- 定義から $0 \leq p_A(x) < \infty$ である. また $x \in A \Rightarrow p_A(x) \leq 1$ が成り立つ.

定義 (凸集合)

X をベクトル空間, $K \subset X$ を空でない集合とする. K が**凸集合**あるいは単に**凸**であるとは, 任意の $x, y \in K$ と任意の $t \in [0, 1]$ に対して $tx + (1-t)y \in K$ が成り立つことである.

命題 5.2

X をベクトル空間, $A \subset X$ を空でない凸かつ吸収的な集合とする. このとき $p_A(x)$ は次を満たす:

- (1) $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$
- (2) $\alpha > 0$ のとき $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$

証明

- (1) • 任意に $\varepsilon > 0$ をとると $\lambda^{-1}x \in A$, $\mu^{-1}y \in A$, $\lambda < p_A(x) + \varepsilon/2$, $\mu < p_A(y) + \varepsilon/2$ なる $\lambda, \mu > 0$ が存在する. このとき $\lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$ が成り立つ.
- $(\lambda + \mu)^{-1}(x + y) \in A$ を示す. 実際

$$\begin{aligned} x + y &= \lambda(\lambda^{-1}x) + \mu(\mu^{-1}y) \\ &= (\lambda + \mu) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\lambda^{-1}x) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\mu^{-1}y) \right\} \end{aligned}$$

であるが $\lambda^{-1}x, \mu^{-1}y \in A$ であり A は凸集合であるから

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\lambda^{-1}x) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\mu^{-1}y) \in A$$

である. したがって $(\lambda + \mu)^{-1}(x + y) \in A$ である.

- 以上より $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$ が成り立つが $\varepsilon > 0$ は任意より $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ を得る.
- (2) • $\alpha > 0$ とする. $\varepsilon > 0$ を任意にとると $\lambda < p_A(x) + \varepsilon/\alpha$, $\lambda^{-1}x \in A$ なる $\lambda > 0$ が存在する. したがって $\alpha\lambda < \alpha p_A(x) + \varepsilon$ であり $(\alpha\lambda)^{-1}(\alpha x) \in A$ であるから

$$p_A(\alpha x) \leq \alpha\lambda < \alpha p_A(x) + \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意より $p_A(\alpha x) \leq \alpha p_A(x)$ が成り立つ.

- これは任意の $\alpha > 0$ に対して成り立つことに注意すると

$$p_A(x) = p_A(\alpha^{-1}(\alpha x)) \leq \alpha^{-1}p_A(\alpha x)$$

であるから $\alpha p_A(x) \leq p_A(\alpha x)$ となり等号が成り立つ.

□

命題 5.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $A \subset X$ を o_X を内点にもつ凸集合とする. このとき $p_A(x)$ は次を満たす:

- (1) ある $M > 0$ が存在して $p_A(x) \leq M\|x\|$ が成り立つ.
- (2) p_A は連続関数である.
- (3) $p_A(x) < 1 \Leftrightarrow x$ は A の内点
- (4) $p_A(x) = 1 \Leftrightarrow x$ は A の境界点

証明

- (1) • o_X は A の内点なので $B_\varepsilon(o_X) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. これは

$$\|x\| < \varepsilon \Rightarrow x \in A \text{ つまり } p_A(x) \leq 1$$

を意味する.

- このことから $M = 2/\varepsilon$ として $p_A(x) \leq M\|x\|$ が成り立つことを見よう. $x = o_X$ のときは明らかに成り立つ ($p_A(o_X) = 0$ より). $x \neq o_X$ のときは $y = (2\|x\|)^{-1}\varepsilon x$ とおくと $\|y\| < \varepsilon$ であるので $p_A(y) \leq 1$ が成り立つ. 命題 5.2 の (2) より

$$\begin{aligned} p_A(y) &= (2\|x\|)^{-1}\varepsilon p_A(x) \leq 1, \\ p_A(x) &\leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\| \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (2) • $p_A(x) = p_A(x - y + y) \leq p_A(x - y) + p_A(y)$ であるから $p_A(x) - p_A(y) \leq p_A(x - y)$ を得る.
- x と y の立場を入れ替えた式と合わせて

$$|p_A(x) - p_A(y)| \leq p_A(x - y) + p_A(y - x) \leq 2M\|x - y\|$$

が成り立つ. これより p_A は連続関数である.

- (3) • $x \in A^\circ$ とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A$ が成り立つ. 特に $x + (\varepsilon/2)x = (1 + \varepsilon/2)x \in A$ である. $\lambda^{-1} = 1 + \varepsilon/2$ とすれば $\lambda < 1$ より $p_A(x) < 1$ である.
- 逆に $p_A(x) < 1$ とすると $p_A(x) + \varepsilon < 1$ なる $\varepsilon > 0$ をとると $0 < \lambda < p_A(x) + \varepsilon$ かつ $\lambda^{-1}x \in A$ となる λ が存在する.
- 一方 o_X は A の内点より $B_\delta(o_X) \subset A$ なる $\delta > 0$ が存在する. A は凸集合より

$$(1 - \lambda)z + x = (1 - \lambda)z + \lambda(\lambda^{-1}x) \in A \quad (\|z\| < \delta)$$

が成り立つ.

- $y = (1-\lambda)z$ とおくと $\|y\| < (1-\lambda)\delta$ ならば $\|z\| < \delta$ であるので $x+y \in A$ である. つまり $B_{(1-\lambda)\delta}(x) \subset A$ であり x が A の内点であることが示された.
- (4)
- $p_A(x) = 1$ とする. $1 \leq \lambda_n \leq 1 + \frac{1}{n}$, $\lambda_n^{-1}x \in A$ なる λ_n が存在する. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1}x = x$ である. よって $x \in \bar{A}$ である. 今 $p_A(x) \neq 1$ より (3) から $x \notin A^\circ$ である. したがって $x \in \partial A$ である.
 - 逆に $x \in \partial A$ とすると $x_n \in A$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ が成り立つ. (2) より p_A は連続で $p_A(x_n) \leq 1$ より $p_A(x) \leq 1$ である. 今 $x \notin A^\circ$ より (3) から $p_A(x) \neq 1$ である. よって $p_A(x) = 1$ である.

□

5.2 Hahn-Banach の分離定理 (実係数)

命題 5.4 (1点と開凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間, $C \subset X$ を空でない開凸集合, $x_0 \notin C$ とする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$f(x) < f(x_0) \quad x \in C$$

が成り立つ.

証明

- 平行移動により $o_X \in C$ と仮定してよい.
- A の Minkowski 汎関数 $p_C(x)$ と X の部分空間

$$G = \mathbb{R}x_0 = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

と G 上の線形汎関数 $g(\alpha x_0) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) を考える.

- このとき $g(x) \leq p_C(x)$ ($x \in G$) が成り立つ. 実際, x_0 は C の内点ではないので (C は開集合に注意) $p_C(x_0) \geq 1$ (命題 5.3-(3),(4)) であるから $\alpha > 0$ のときは

$$p_C(\alpha x_0) = \alpha p_C(x_0) \geq \alpha = g(\alpha x_0)$$

が成り立つ. 逆に $\alpha \leq 0$ のときは

$$g(\alpha x_0) = \alpha \leq 0 \leq p_C(\alpha x_0)$$

より成り立つ.

- したがって Hahn-Banach の定理 (定理 4.1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad (x \in G), \\ f(x) &\leq p_C(x) \quad (x \in X) \end{aligned}$$

となる X 上の線形汎関数 f が存在する.

- 特に命題 5.3(1) よりある $M > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq p_C(x) + p_C(-x) \leq 2M\|x\|$$

が成り立つので $f \in X^*$ である.

- また, 任意の $x \in C$ に対して 命題 5.3(3) より

$$f(x_0) = g(x_0) = 1 > p_C(x) \geq f(x)$$

が成り立つ. $\square$

注 $f(x_0) = \alpha$ とする. この命題の主張を「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は 1 点 $\{x_0\}$ と開凸集合 C を分離する」ともいう.

定理 5.5 (開凸集合と凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間, $A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. また, A は開集合であるとする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$f(x) < f(y) \quad x \in A, y \in B$$

が成り立つ.

証明

- $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$ とおくと C は開集合でありかつ凸であることを示そう.
- $z_1, z_2 \in C$ とすると $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2$ となる $x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in B$ が存在する. このとき任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in A, \quad ty_1 + (1-t)y_2 \in B$$

であるので $tz_1 + (1-t)z_2 = \{tx_1 + (1-t)x_2\} - \{ty_1 + (1-t)y_2\} \in C$ である.

- 次に開集合であることを示そう. $z_0 = x_0 - y_0 \in C (x_0 \in A, y_0 \in B)$ とする. A は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x_0) \subset A$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x_0 - y_0) &= \{z \in X : \|z - (x_0 - y_0)\| < \varepsilon\} \\ &= \{z \in X : \|(z + y_0) - x_0\| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

であることに注意すると, $z \in B_\varepsilon(x_0 - y_0)$ ならば $z + y_0 \in B_\varepsilon(x_0) \subset A$ が成り立つ. $z = (z + y_0) - y_0$ より $z \in C$ である.

- $A \cap B = \emptyset$ より $o_X \notin C$ である. したがって命題 5.4 よりある $f \in X^*$ が存在して $f(z) < f(o_X) = 0$ ($z \in C$) が成り立つ.
- $z \in C$ を $z = x - y$ ($x \in A, y \in B$) とかけば

$$f(x) < f(y) \quad (x \in A, y \in B)$$

が成り立つ. $\square$

注 $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$ なる α をとるとき

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad (x \in A, y \in B)$$

が成り立つ. このことを「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は A と B を分離する」という.

定理 5.6 (閉凸集合とコンパクト凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間, $A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. また, A は閉集合, B はコンパクト集合であるとする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{y \in B} f(y) \quad x \in A, y \in B$$

が成り立つ.

注 このことを「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は A と B を強く分離する」という.

証明

- $C = A - B$ とおくと C は凸集合でありかつ閉集合である. 凸であることは定理 5.5 のときと同様である. 閉であることを示そう.
- $z_n \in C, z_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) とする. $z_n = x_n - y_n$ となる $x_n \in A, y_n \in B$ が存在する. B はコンパクトなので $\{y_n\}$ のある部分列 $\{y_{n_k}\}$ と $y \in B$ が存在して $y_{n_k} \rightarrow y$ ($k \rightarrow \infty$) が成り立つ. $x_{n_k} = z_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow z + y$ ($k \rightarrow \infty$) で A は閉集合であるから $z + y \in A$ である. $z = (z + y) - y$ より $z \in C$ である. したがって C は閉集合である.
- $o_X \notin C$ で C^c は開集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(o_X) \cap C = \emptyset$ が成り立つ.
- $B_\varepsilon(o_X)$ は開凸集合より 定理 5.5 から, ある恒等的に 0 でない $f \in X^*$ が存在して

$$f(x - y) < f(\varepsilon z) \quad (z \in B_1(o_X), x \in A, y \in B)$$

が成り立つ. f の連続性と $\pm z$ を考えることにより

$$f(x - y) + \varepsilon |f(z)| \leq 0 \quad (z \in \overline{B_1(o_X)}, x \in A, y \in B)$$

が成り立つ.

- z に関する上限をとれば

$$f(x) - f(y) + \varepsilon \|f\|_{X^*} \leq 0 \quad (x \in A, y \in B)$$

が成り立つ. したがって

$$\sup_{x \in A} f(x) < \sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \|f\|_{X^*} \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

を得る. $\square$

5.3 Hahn-Banach の分離定理 (複素係数)

- Hahn-Banach の分離定理を複素ノルム空間へ拡張しよう.
- $X_{\mathbb{R}}$ を X を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として考えたものとする.
- このとき $g \in (X_{\mathbb{R}})^*$ に対して $f(x) = g(x) - ig(ix)$ とおくと g は X 上の線形汎関数であることが定理 4.4 の証明と同様にしてわかる. さらに

$$|f(x)| \leq |g(x)| + |g(ix)| \leq \|g\| \|x\| + \|g\| \|ix\| = 2\|g\| \|x\|$$

より $f \in X^*$ であることがわかる.

- このことを用いると以下のことがわかる.

命題 5.7 (1 点と開凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ 複素ノルム空間, $C \subset X$ を空でない開凸集合, $x_0 \notin C$ とする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x_0) \quad x \in C$$

が成り立つ.

定理 5.8 (開凸集合と凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ を複素ノルム空間, $A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. また, A は開集合であるとする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(y) \quad x \in A, y \in B$$

が成り立つ.

定理 5.9 (閉凸集合とコンパクト凸集合の分離)

$(X, \|\cdot\|)$ を複素ノルム空間, $A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. また, A は閉集合, B はコンパクト集合であるとする. このとき, ある $f \in X^*$ が存在して

$$\sup_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) < \inf_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \quad x \in A, y \in B$$

が成り立つ.