2 BaireのCategory定理・一様有界性原理

本節と次の節でBaireのCathgory定理とそれにより導かれる関数解析の3つの重要な定理「一様有界性原理」「開写像定理」「閉グラフ定理」を述べる．

2.1 BaireのCategory定理

定理 2.1（BaireのCategory定理）

(X,d) を完備距離空間とする．X が可算個の閉集合 F_n により $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ と表されるならば，少なくとも1つの F_n は内点をもつ．

証明

- 結論を否定し，「いかなる F_n も内点を含まない」と仮定する．
- 仮定より F_1 は内点を含まないので $F_1 \neq X$ である．
- F_1^c は開集合で $F_1^c \neq \emptyset$ より，ある $x_1 \in X$ とある $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ が存在して $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset F_1^c$
- 仮定より F_2 は内点を含まないので $B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \not\subset F_2$ である．よって開集合 $F_2^c \cap B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ は空でないため，ある $x_2 \in X$ とある $\varepsilon_2 \in (0, 1/2^2)$ があって $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cap F_2^c$ が成り立つ．
- 以下順に，$0 < \varepsilon_n < 1/2^n$, $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を
$$B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\varepsilon_n/2}(x_n), \quad B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$$
となるようにとることができる．
- $\{x_n\}$ は Cauchy 列であることを示そう．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，$n_0 \in \mathbb{N}$ を $(1/2^{n_0}) < \varepsilon$ となるようにとる．このとき $m > n \geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \end{aligned}$$
である．したがって $\{x_n\}$ はCauchy列である．したがってある x_∞ に収束する．
- ところで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $m > n$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_n, x_\infty) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_\infty) \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{2} + d(x_m, x_\infty) \to \frac{\varepsilon_n}{2} \quad (m \to \infty) \end{aligned}$$
- したがって $d(x_n, x_\infty) < \varepsilon_n$ つまり $x_\infty \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ である．一方，$B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ より $x_\infty \notin F_n$ である．
- n は任意より $x_\infty \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となるがこれは $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ に矛盾する．□

2.2　一様有界性原理

定理 2.2（一様有界性原理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathscr{L}(X,Y)$ に属する作用素の族とする．このとき任意の $x \in X$ に対して

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty$$

ならば

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$

- X の開球を $B_r^{(X)}(x_0)$, Y の開球を $B_r^{(Y)}(y_0)$ と表すことにする．
- $F_n = \{x \in X : \underline{\|T_\lambda x\|_Y \leq n}\ ({}^\forall\lambda \in \Lambda)\}$ とおくとこれは X の閉集合である．実際，$F_n = \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^{-1}(\overline{B_n^{(Y)}(o_Y)})$ と書け，T_λ の連続性から $T_\lambda^{-1}(\overline{B_n^{(Y)}(o_Y)})$ は閉集合であり，任意濃度の個数の共通部分は閉集合であることから従う．
- 仮定から $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ が成り立つ．したがって Baire の Category 定理（定理 2.1）によりある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して F_{n_0} は内点をもつ．つまり，$x_0 \in F_{n_0}$ とある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0) \subset F_{n_0}$ が成り立つ．
- $x_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0)$ で $x \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ ならば $x + x_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0)$ より，$x \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ ならば

$$\|T_\lambda x\|_Y = \|T_\lambda(x + x_0) - T_\lambda x_0\|_Y \leq 2n_0$$

  が成り立つ．
- 任意の $x \in X (x \neq o_X)$ に対し，$y = \varepsilon_0 \dfrac{x}{2\|x\|_X}$ とすると $y \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ であるから $\|T_\lambda y\|_Y \leq 2n_0$ が成り立つ．この式を変形すると

$$\|T_\lambda x\|_Y \leq \frac{4n_0}{\varepsilon} \|x\|_X$$

  となる．n_0, ε は λ によらないので $\|T_\lambda\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \dfrac{4n_0}{\varepsilon_0} < \infty$ が成り立つ．□

定理 2.3（Banach-Steinhaus の定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$\{T_n\}$ を $\mathscr{L}(X,Y)$ に属する作用素の列とし，任意の $x \in X$ に対して $\{T_n x\}$ が収束するとする．このとき

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

とおくと $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ であり

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \tag{2.1}$$

が成り立つ．

証明

- $T : X \to Y$ は線形であることは明らかである（証明せよ）.
- 収束列は有界列であるので，任意の $x \in X$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_Y < \infty$ である．したがって一様有界性原理（定理 2.2）により $M_0 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty$ である．
- $\|T_n x\|_Y \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \|x\|_X \leq M_0 \|x\|_X$ で $n \to \infty$ とすると $\|Tx\|_Y \leq M_0 \|x\|_X$ である．したがって $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ である．
- (2.1) を示そう．$m = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $\inf_{k\geq n} \|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- したがって，

  任意の $n \geq n_0$ に対して，ある $k \geq n$ が存在して
  $$\|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon \tag{2.2}$$
  が成り立つ．

- $n = n_0$ で (2.2) を用いると $n_1 \geq n_0$ が存在して $\|T_{n_1}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- $n_1 + 1 \geq n_0$ なので (2.2) より $n_2 \geq n_1 + 1$ が存在して $\|T_{n_2}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- $n_2 + 1 \geq n_0$ なので (2.2) より $n_3 \geq n_2 + 1$ が存在して $\|T_{n_3}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- 以上繰り返すことにより，ある自然数の単調増加列 $\{n_k\}$ に対して

  $$\|T_{n_k}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

  が成り立つ．

- これより

$$\|T_{n_k}x\|_Y \le \|T_{n_k}\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X < (m+\varepsilon)\|x\|_X$$

  である．

- この式で $k \to \infty$ とすれば

$$\|Tx\|_Y \le (m+\varepsilon)\|x\|_X$$

  が成り立つ．これより $\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \le m+\varepsilon$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意より (2.1) を得る．$\square$

3　開写像定理・閉グラフ定理

3.1　開写像定理

- $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間，$T : X \to Y$ を作用素（写像）とする．$A \subset X$ に対し

$$T(A) = TA = \{y \in Y : {}^\exists x \in A, y = Tx\}$$

と書き，A の T による**像**という．

- 開写像定理を述べよう．

定理 3.1（開写像定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とし T は全射，つまり $TX = Y$ とする．このとき T は開写像，つまり任意の X の開集合 O に対して TO は Y の開集合である．

- 開写像定理は次の補題に集約される．

補題 3.2

定理 3.1 の仮定の下で，ある $C > 0$ が存在して $T(B_1^{(X)}(o_X)) \supset B_C^{(Y)}(o_Y)$ が成り立つ．

補題 3.2 の証明

- T は全射なので

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^{(X)}(o_X)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^{(X)}(o_X))}$$

が成り立つ．

- Baire の Category 定理 (定理2.1) により，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\overline{T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))}$ は内点をもつ，つまり，ある $y_0 \in Y$, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(y_0) \subset \overline{T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

- 任意の $y \in B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(o_Y)$ に対して $y = y_0 + y - y_0$ で $y_0 + y$, $y_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(y_0)$ であるから (3.1) により，ある $\{y_k\}$, $\{y'_k\} \subset T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))$ が存在して $y_k \to y_0 + y$, $y'_k \to y_0$ $(k \to \infty)$ が成り立つ．

- ここで $y_k - y'_k \in T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))$ に注意すると $y \in \overline{T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))}$ であることがわかる．つまり

$$B^{(Y)}_{\varepsilon}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))} \tag{3.2}$$

$\rho = \varepsilon/2n_0$ とおくと

$$B^{(Y)}_{\rho}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{1}(o_X))} \tag{3.3}$$

さらに，任意の $\alpha > 0$ に対し

$$B^{(Y)}_{\alpha\rho}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{\alpha}(o_X))} \tag{3.4}$$

が成り立つ．

- 任意に $y \in B^{(Y)}_{\rho/2^2}(o_Y)$ を 1 つとると，$\alpha = 1/2^2$ として (3.4) を用いると

$$\|x_0\|_X < \frac{1}{2^2}, \quad \|y - Tx_0\|_Y < \frac{1}{2^3}\rho$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

- $y - Tx_0 \in B^{(Y)}_{\rho/2^3}(o_Y)$ より $\alpha = 1/2^3$ で (3.4) を用いると

$$\|x_1\|_X < \frac{1}{2^3}, \quad \|(y - Tx_0) - Tx_1\|_Y < \frac{1}{2^4}\rho$$

となる $x_1 \in X$ が存在する．

- $y - Tx_0 - Tx_1 \in B^{(Y)}_{\rho/2^4}(o_Y)$ より $\alpha = 1/2^4$ で (3.4) を用いると

$$\|x_2\|_X < \frac{1}{2^4}, \quad \|(y - Tx_0 - Tx_1) - Tx_2\|_Y < \frac{1}{2^5}\rho$$

となる $x_2 \in X$ が存在する．

- 以下繰り返して

$$\|x_k\|_X < \frac{1}{2^{k+2}}, \qquad \|y - Tx_0 - T_1 - \cdots - Tx_k\|_Y < \frac{1}{2^{k+3}}\rho \tag{3.5}$$

となる $x_k \in X$ がとれる．

- (3.5) より $n > m$ ならば

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\|_X < \frac{1}{2^{m+3}}, \quad \left\|\sum_{k=m+1}^{n} Tx_k\right\|_Y < \frac{\rho}{2^{m+4}},$$

が成り立つので $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $y - \sum\limits_{k=0}^{n} Tx_k$ は Cauchy 列，したがって収束列であることがわかる．特に, $y - \sum\limits_{k=0}^{n} Tx_k$ は o_Y に収束する．

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k = x$ とおくと T は連続であることから

$$y = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} Tx_k = \lim_{n\to\infty} T\sum_{k=1}^{n} x_k = T\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k = Tx$$

である．

- 最後に

$$\|x\|_X \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2} < 1$$

であるから $x \in B_1^{(X)}(o_X)$ である．以上より，任意の $y \in B_{\rho/2^2}^{(Y)}(o_Y)$ に対して $y = Tx$ なる $x \in B_1^{(X)}(o_X)$ が存在することがわかり $C = \rho/2^2$ として補題の主張が示された．□

定理 3.1 の証明

- $T\emptyset = \emptyset$ より $O = \emptyset$ のときは明らか．
- O を空でない X の開集合とする．このとき，任意の $x_0 \in O$ に対してある $r > 0$ が存在して $B_r^{(X)}(x_0) \subset O$ が成り立つ．$B_r^{(X)}(x_0) = \{x_0\} + B_r^{(X)}(o_X)$ が成り立つ．
- T の線形性より

$$T(B_r^{(X)}(x_0)) = \{Tx_0\} + T(B_r^{(X)}(o_X)) = \{Tx_0\} + rT(B_1^{(X)}(o_X)) \subset TO$$

が成り立つ．

- 補題 3.2 よりある $C > 0$ が存在して $B_C^{(Y)}(o_Y) \subset T(B_1^{(X)}(o_X))$ が成り立つ．したがって $B_{rC}^{(Y)}(Tx_0) \subset TO$ となる．これは TO の任意の点 $y_0 = Tx_0$ $(x_0 \in O)$ が内点であることを意味する．したがって TO は開集合である．□

問 (3.1) から (3.2)，(3.3)，(3.4) を導け．

系 3.3（値域定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とし T は全単射，つまり $TX = Y$ かつ T は 1 対 1 とする．このとき $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ である．

証明

- T は全単射であるから逆写像 T^{-1} が存在する．さらに T^{-1} は Y から X への線形作用素である．
- O を X の開集合とすると開写像定理 (定理 3.1) より $T(O) = (T^{-1})^{-1}(O)$ は Y の開集合である．これは任意の X の開集合 O の T^{-1} による逆像がまた開集合であることを意味するので T^{-1} は連続である．したがって $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ である．□

3.2 閉グラフ定理

- 応用上重要な作用素の中には X 全体で定義されておらず，X のある部分空間で定義されている作用素が多く登場する．その中で閉作用素を定義しよう．

- その前に2つのノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ の直積空間を定義しよう．ただしこれら2つのノルム空間は同じ係数体 $\mathbb{K}$ 上のノルム空間であるとする．X と Y の直積集合 $X \times Y$ は
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$
で定義される．

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対して和 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ を
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$(x, y) \in X \times Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対してスカラー培 $\alpha(x, y)$ を
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$
で定義すると $X \times Y$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．ここで $X \times Y$ の零ベクトルは (o_X, o_Y) である．

- さらに $(x, y) \in X \times Y$ に対して
$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$
と定義すると $\|\cdot\|_{X \times Y}$ は $X \times Y$ におけるノルムとなる（証明せよ）．このようにしてできたノルム空間 $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ を X と Y の**直積（ノルム）空間**という．X, Y がともにBanach空間であるとき，$X \times Y$ もBanach空間となる（証明せよ）．

- X, Y をノルム空間とし，$D(A)$ を X の部分空間とする．$A : D(A) \to Y$ を線形作用素とするとき，
$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$
を A の**グラフ**といい，直積空間 $X \times Y$ の部分空間である．

定義（閉作用素）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．このとき $G(A)$ が直積ノルム空間 $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ の閉集合であるとき，A を**閉作用素**という．

- 閉作用素の同値な表現を述べよう．

命題 3.4

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．A が閉作用素であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned}&\{x_n\} \subset D(A),\ y \in Y \text{ に対し}\\ &x_n \to x (n \to \infty),\quad Ax_n \to y (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad x \in D(A),\quad y = Ax\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立つことである．

証明 **閉作用素 $\Rightarrow$ (3.6)**

- $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$ とする． このとき $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ で $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ である．
- $G(A)$ は閉であるから $(x, y) \in G(A)$ つまり $x \in D(A)$, $y = Ax$ となる．これは (3.6) を意味する．

(3.6)$\Rightarrow$ 閉作用素

- $(x_n, y_n) \in G(A)$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ とする．$G(A)$ の定義より $y_n = Ax_n$ とかけるので $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ である．
- 直積空間のノルムの定義から $x_n \to x$, $Ax_n \to Y$ を意味するので (3.6) より $x \in D(A)$, $y = Ax$ である．したがって $(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$ となり，$G(A)$ は閉集合であること，つまり A は閉作用素であることが示された．□

例 1 $X = C([a, b])$ とし，$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ とおく．ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ とその部分空間 $D(A) = C^1([a, b])$ を考える（部分空間といっているので $D(A)$ でも X と同じノルムを考える）．$x \in D(A)$ に対して

$$(Ax)(t) = x'(t)$$

とすると．$A : D(A) \to X$ は閉作用素である．実際，$x_n \to x$ in X, $Ax_n \to y$ in X とすると，$\{x_n\}$ は x に $\{x'_n\}$ は y に $[a, b]$ 上で一様収束する．

微積分の基本定理より

$$x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t x'_n(s)ds$$

において $n \to \infty$ とすると

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)ds$$

が成り立つ．再び微積分の基本定理から $x \in C^1([a, b]) = D(A)$ であり $Ax = x' = y$ である．

- A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．このとき，$D(A)$ において

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

を $D(A)$ の**グラフノルム**という．x のグラフノルムは $(x, Ax) \in G(A)$ の $X \times Y$ におけるノルムと一致する．

命題 3.5

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．A が閉作用素であるための必要十分条件は $D(A)$ がグラフノルムの意味で完備であることである．

証明 **閉作用素 $\Rightarrow$ $D(A)$ がグラフノルムで完備**

- $\{x_n\} \subset D(A)$ がグラフノルムに関して Cauchy 列とする．$\|x_m - x_n\|_X$, $\|Ax_m - Ax_n\|_Y \leq \|x_m - x_n\|$ より $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$ はそれぞれ X, Y の Cauchy 列である．
- X, Y は完備であるから $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ となる $x \in X$, $y \in Y$ が存在する．命題 3.4 より $x \in D(A)$, $y = Ax$ であるから

$$\|x_n - x\| = \|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるので $D(A)$ はグラフノルムで完備である．

$D(A)$ がグラフノルムで完備 $\Rightarrow$ 閉作用素

- $(x_n, y_n) \in G(A)$ とし $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ とする．$G(A)$ の定義より $y_n = Ax_n$ とかけるので $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ である．
- 直積空間のノルムの定義から $x_n \to x$ in X, $Ax_n \to y$ in Y より $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$ はそれぞれ X, Y の Cauchy 列である．
- グラフノルムの定義から

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_n\| + \|Ax_m - Ax_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より $\{x_n\}$ はグラフノルムの意味で $G(A)$ の Cauchy 列である．

- 仮定より $x^* \in D(A)$ が存在して

$$\|x_n - x^*\| = \|x_n - x^*\| + \|Ax_n - Ax^*\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つか，X における極限の一意性から $x^* = x$ であるので $y = Ax$ である．つまり $(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$ を得る．

- したがって A は閉作用素である．□

- 閉グラフ定理を述べよう．

定理 3.6（閉グラフ定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への閉作用素とする．このとき $D(A) = X$ ならば $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ である．

証明

- A は閉作用素であるから命題3.5より $(G(A), \|\cdot\|_{X\times Y})$ は完備である．

- $G := G(A)$ から X への線形作用素 T を次で定義する：

$$T(x, Ax) = x \quad ((x, Ax) \in G(A))$$

- このとき $\|T(x, Ax)\|_X = \|x\|_X \leq \|(x, Ax)\|_{X\times Y}$ であるから T は有界である．また $D(A) = X$ より T は全射である．

- したがって補題3.2より，ある $C > 0$ が存在して

$$B_C^{(X)}(o_X) \subset T(B_1^{(G)}(o_G))$$

が成り立つ．これは

$$\|x\|_X < C \quad \Rightarrow \quad \|(x, Ax)\|_{X\times Y} < 1 \tag{3.7}$$

が成り立つことを意味する．

- 任意に $x \neq o_X$ をとり $z = \dfrac{Cx}{2\|x\|_X}$ とおくと $\|z\|_X < C$ であるから (3.7) より $\|(z, Az)\|_{X\times Y} < 1$ である．これを書きかえると

$$\|z\|_X + \|Az\|_Y = \frac{C}{2\|x\|_X}(\|x\|_X + \|Ax\|_Y) < 1$$

を得る．これより

$$\frac{C}{2\|x\|_X}\|Ax\|_Y < 1 \quad \text{つまり} \quad \|Ax\|_Y \leq \frac{2}{C}\|x\|_X$$

が成り立つ．これは $x = o_X$ のときも成り立つ．したがって $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ である．□