7 Sobolev 空間

7.1 Sobolev 空間の定義

定義

$s \in \mathbb{R}$ とする．**Sobolev 空間** $H^s(\mathbb{R}^N)$ とそのノルム $\|\cdot\|_{H^s}$ を次で定義する：

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\},$$
$$\|v\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

注 $H^s(\mathbb{R}^N)$ は H^s ともかかれることがある．

定理 7.1

$s \in \mathbb{R}$ とする．$H^s(\mathbb{R}^N)$ は $\|\cdot\|_{H^s}$ として Banach 空間となる．

証明

- $\|\cdot\|_{H^s}$ がノルムであることの証明は略
- $\{v_n\}$ を $H^s(\mathbb{R}^N)$ の Cauchy 列とし

$$w_n = \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}_n]$$

  とおくと Plancherel の定理（定理 6.9）と $H^s(\mathbb{R}^N)$ のノルムの定義より

$$\|w_m - w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{v}_n - \hat{v}_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|v_n - v_m\|_{H^s}$$

  が成り立つ．したがって $\{w_n\}$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ の Cauchy 列である．

- $L^2(\mathbb{R}^N)$ は完備なので，ある $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$$

  が成り立つ．

- ここで $v = \mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{w}]$ とおくと $\hat{v} = (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{w}$ より

$$\hat{w} = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \Leftrightarrow \quad v \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

- したがって

$$\begin{aligned}
\|v_n - v\|_{H^s} &= \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{v}_n - \hat{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{v}_n - (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|\hat{w}_n - \hat{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|w_n - w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

- したがって $\{v_n\}$ は $H^s(\mathbb{R}^N)$ における収束列である．$\square$

系 7.2

$(u,v)_{H^s}$ を

$$(u,v)_{H^s} = \big((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\big)_{L^2(\mathbb{R}^N} \quad (u,v \in H^s(\mathbb{R}^N))$$

とすると $(\cdot,\cdot)_{H^s}$ は $H^s(\mathbb{R}^N)$ の内積となり $H^s(\mathbb{R}^N)$ は Hilbert 空間となる．

定理 7.3

$m \in \mathbb{N}$ のとき

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^N) : D^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^N) \ \ (|\alpha| \leq m)\} \tag{7.1}$$

が成り立つ．ここで $D^\alpha v$ は $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ とみなしたときの超関数微分である．
さらに

$$|||v||| = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{1/2}$$

とすると，ある $C > 0$ が存在して

$$\frac{1}{C}\|v\|_{H^s} \leq |||v||| \leq \|v\|_{H^s}$$

が成り立つ．

証明

- (7.1) の右辺を V_m とおく．
- まず次に注意する：

$$\begin{aligned} v \in V_m &\Leftrightarrow {}^\forall\alpha : |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^N) \\ &\Leftrightarrow {}^\forall\alpha : |\alpha| \leq m, i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

実際

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D^\alpha v}, \varphi\rangle &= \langle D^\alpha v, \hat{\varphi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle v, D^\alpha \hat{\varphi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle v, \widehat{(-i(\cdot))^\alpha\varphi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \hat{v}, (-i(\cdot))^\alpha\varphi\rangle \\ &= \langle i^{|\alpha|}(\cdot)^\alpha v, \varphi\rangle \end{aligned}$$

- さらに
$$i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ (|\alpha| \le m) \Leftrightarrow\ (1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$$
である.

- 次に Plancherel の定理（定理 6.9）より
$$\|D^{\alpha}v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\xi^{\alpha}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad ({}^{\forall}\alpha : |\alpha| \le m)$$
また $\|\xi^{\alpha}| \le |\xi|^{|\alpha|} \le |\xi|^m \le (1+|\xi|^2)^{m/2}$ であるので
$$\|\xi^{\alpha}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
を得る．これより $C_1 > 0$ が存在して
$$\|v\| \le C\|v|_{H^s}$$
が成り立つ.

- 一方，ある $c_{m,N} > 0$ が存在して
$$c_{m,N}(1+|\xi|^2)^m \le \sum_{|\alpha|\le m} \xi^{2\alpha}$$
が成り立つ．実際
$$(1+|\xi|^2)^m = (1+\xi_1^2+\cdots+\xi_N^2)^m \le (N+1)^m(1+\xi_1^{2m}+\cdots+\xi_N^{2m}) \le \sum_{|\alpha|\le m} \xi^{2\alpha}$$
が成り立つ.

- これより
$$\begin{aligned}
c_{m,N}\|v\|_{H^m}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^m |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
&\le \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi^{\alpha}\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \|\xi^{\alpha}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2
\end{aligned}$$
を得る．□

定理 7.4

$s \in \mathbb{R}$ とする．$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ は $H^s(\mathbb{R}^N)$ で稠密である.

証明

- $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ をとると $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ である．
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ で稠密より，ある $\{v_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\hat{v}_n \to (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \quad (n \to \infty) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．

- $\hat{w}_n = (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}_n$ とすると $w_n \in H^s(\mathbb{R}^N)$ であり

$$\begin{aligned}\|w_n - v\|_{H^s} &= \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{w}_n - \hat{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|\hat{v}_n - (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

を得る．□

7.2 Sobolev の埋蔵定理

- $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}&C_b^m(\mathbb{R}^N) = \{u \in C^m(\mathbb{R}^N) : D^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad |\alpha| \le m\}, \\ &\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha u(x)|\end{aligned}$$

と定める．$C_b^m(\mathbb{R}^N)$ は $\|\cdot\|_{C_b^m(\mathbb{R}^N)}$ をノルムとして Banach 空間となる．

定理 7.5（Sobolev の埋蔵定理）

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s > N/2 + m$ とする．このとき $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C_b^m(\mathbb{R}^N)$ であり，ある $C > 0$ が存在して

$$\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^N)} \le C\|u\|_{H^s} \quad ({}^\forall u \in H^s(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ．

証明

- $m = 0$ の場合に示す．
- $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N$ とすると任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\begin{aligned}|v(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi \cdot x}\hat{v}(\xi)d\xi \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{v}(\xi)|d\xi \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\|v\|_{H^s} \quad \text{（Schwartz の不等式）}\end{aligned}$$

- 次に $s > N/2$ より極座標変換を使うと

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi &= \omega_{N-1}\int_0^\infty r^{N-1}(1+r^2)^{-s}dr \\ &\leq \frac{\omega_{N-1}}{2^s}\int_0^\infty (1+r)^{N-1-2s}dr = \frac{\omega_{N-1}}{2^s(N-2s)} < \infty\end{aligned}$$

  ここで $(1+r)^2 \leq 2(1+r^2)$ したがって $(1+r^2)^{-s} \leq (1/2^s)(1+r)^{-2s}$ が成り立つことを用いた.

- したがってある $C = C(N,s) > 0$ が存在して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|v(x)| \leq C\|v\|_{H^s} \quad (v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)) \tag{7.2}$$

  が成り立つ.

- 次に (7.2) が全ての $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ に対して成り立つことを見よう.

- $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ とすると定理 7.4 より，ある $\{v_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$v_n \to v \ (n \to \infty) \ \text{ in } \ H^s(\mathbb{R}^N)$$

  が成り立つ.

- これより

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|v_n(x) - v_m(x)| \leq C\|v_n - v_m\|_{H^s}$$

  であるから $\{v_n\}$ は $C_b(\mathbb{R}^N)$ で Cauchy 列である.

- $C_b(\mathbb{R}^N)$ は Banach 空間であるから，ある $w \in C_b(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$v_n \to w \ (n \to \infty) \ \text{ in } \ C_b(\mathbb{R}^N)$$

- w と v が $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ において一致することを示す.

- $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ とすると Hölder の不等式を用いれば

$$\langle v_n, \varphi\rangle = (v_n, \overline{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to (w, \overline{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle w, \varphi\rangle$$

- 一方

$$\begin{aligned}|\langle v_n - v, \varphi\rangle| &= |(v_n - v, \overline{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \\ &= |(\hat{v}_n - \hat{v}, \hat{\overline{\varphi}})_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi))(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{\overline{\varphi}}(\xi)d\xi\right| \\ &\leq \|v_n - v\|_{H^s}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-s}|\hat{\overline{\varphi}}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \to 0 (n \to \infty)\end{aligned}$$

- したがって $\langle v_n, \varphi\rangle \to \langle v, \varphi\rangle$ $(n \to \infty)$ が成り立ち $\langle v, \varphi\rangle = \langle w, \varphi\rangle$ $({}^\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ が成り立つ．

- 以上で $v = w$ が $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ で成り立つ．最後に $v = v_n$ とした (7.2) で $n \to \infty$ とすれば $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ に対して (7.2) が成り立つことを得る．$\square$