6　緩増加超関数

6.1　Lebesgue 空間

- 緩増加超関数の定義の前に Lebesgue 空間についてまとめておこう（簡単のため $\mathbb{R}^N$ の場合に限る）.
- $1 \le p < \infty$ に対して
$$L^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} : u : \text{Lebesgue 可測},\ \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$
と定義する.
- $p = \infty$ のとき
$$L^\infty(\mathbb{R}^N) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} : u : \text{Lebesgue 可測},\ {}^\exists M > 0 \text{ s.t. } |u(x)| \le M \quad \text{a.e.} \mathbb{R}^N \right\}$$
と定義する.
- $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対して $u = v$ a.e. $\mathbb{R}^N$ の場合，u と v は等しいとみなす.
- $1 \le p < \infty$ に対して
$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
とおく.
- $p = \infty$ のとき
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \inf\{M > 0 : |u(x)| \le M \quad \text{a.e. } \mathbb{R}^N\}$$
とおく.
- 次の不等式が成り立つ：
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)v(x)| dx \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad u \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad v \in L^q(\mathbb{R}^N)$$
これを **Hölder の不等式**という.
- また $1 \le p \le \infty$ に対して次の不等式が成り立つ：
$$\|u + v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$1 \le p < \infty$ のときこの不等式を **Minkowski の不等式**という.

- $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ のノルムとなるが，さらに Banach 空間となる．
- $p=2$ のとき $L^2(\mathbb{R}^2)$ は

$$(u,v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\overline{v(x)}dx$$

を内積として Hilbert 空間となる．

- $u,\, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)v(x)|dx \le \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

が成り立ち **Schwartz の不等式**という．

6.2 緩増加超関数

定義

$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が**緩増加超関数**であるとは T が次の 2 条件を満足することである：

(1) （線形性）

$$T(\varphi_1+\varphi_2) = T(\varphi_1)+T(\varphi_2) \ \ (\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)),$$
$$T(\alpha\varphi) = \alpha T(\varphi) \ \ (\alpha \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

(2) （連続性）$\{\varphi_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ が

$$\varphi_n \to \varphi \ \ (n\to\infty) \ \text{ in } \ \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \ \ \Rightarrow \ \ T(\varphi_n) \to T(\varphi) \ \ (n \to \infty)$$

- 緩増加超関数全体を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ あるいは $\mathscr{S}'$ と表す．
- $T(\varphi)$ は $\langle T, \varphi\rangle$ ともかかれる．
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ にはセミノルム系

$$p_k(v) = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^k |D^\alpha v(x)|$$

が定義されている．以下の命題は命題 4.6 による．

命題 6.1

$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が緩増加超関数であるための必要十分条件は T が線形であって，ある $m \in \mathbb{N}$ とある $C > 0$ が存在して次が成り立つことである：

$$|T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^m |D^\alpha v(x)| = Cp_m(\varphi) \ \ ({}^\forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

例１ Dirac の δ 関数 δ は $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．
例２ $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．実際，$e^{|x|^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ であるから $e^{|x|^2} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ であるが $e^{|x|^2} \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．
例３ $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ は $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

と定義すると $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．

実際，$1 < p < \infty$ とする．$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ とすると，任意の $q \in (1, \infty)$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|(1+|x|^2)^{-(n+2)/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^{\frac{n}{2}+1} |\varphi(x)| \\
&\leq \|(1+|x|^2)^{-(n+2)/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^{n+1} |\varphi(x)|
\end{aligned}$$

に注意すると $(1/p) + (1/q) = 1$ となる q をとると Hölder の不等式により

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} p_{n+1}(\varphi)$$

である．したがって $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．

緩増加超関数の収束

定義

$\{T_n\} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ とする．$\{T_n\}$ が T に $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ で**収束する**とは

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi) \quad (n \to \infty) \quad {}^\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つことである．このとき

$$T_n \to T \quad (n \to \infty) \quad \text{in} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$$

と表す．

定理 6.2

$\{T_n\} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ は任意の $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\{T(\varphi_n)\}$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列になるとする．このとき $\{T(\varphi_n)\}$ は任意の $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して収束するので $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ を

$$T(\varphi) := \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$$

で定義すると $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．

証明

- T の線形性は明らか．
- T の連続性は Frechét 空間における Banach-Steinhaus の定理（系 4.8）から従う．

□

6.3 緩増加超関数の Fourier 変換

6.3.1 $\mathbb{R}^N$ における Fourier 変換（概略）

- $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $f = f(x)$ に対し

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx$$

  を f の **Fourier 変換**という．ここで $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_N x_N$ である．

- $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $f = f(\xi)$ に対し

$$\mathscr{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} f(x)dx$$

  を f の **Fourier 逆変換**という．

命題 6.3

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, α を任意の多重指数とすると次が成り立つ：

(1) $\mathscr{F}[D_x^\alpha f](\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

(2) $\mathscr{F}[x^\alpha f](\xi) = i^{|\alpha|}D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

(3) $\mathscr{F}^{-1}[D_\xi^\alpha f](x) = (-i)^{|\alpha|}x^\alpha \check{f}(x)$

(4) $\mathscr{F}^{-1}[\xi^\alpha f](x) = (-i)^{|\alpha|}D_x^\alpha \check{f}(x)$

ここで D_x^α は x の関数に作用する偏微分作用素という意味である．D_ξ^α も同様.

命題 6.4

(1) $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ ならば $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ である.

(2) $f, g \in \mathbb{R}^N$ ならば $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ である．さらに

$$\mathscr{F}[f * g](\xi) = (2\pi)^{N/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

が成り立つ.

命題 6.5

$f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ならば $\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$

命題 6.6

$\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ から $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ への連続写像である.

命題 6.7

$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} = I$ （恒等写像）が $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ で成り立つ.

6.3.2 緩増加超関数の Fourier 変換

定義

$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}[T] = \hat{T}$ と Fourier 逆変換 $\mathscr{F}^{-1}[T] = \check{T}$ を次で定義する：

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)),$$
$$\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi}) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

注 命題6.6より $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi_n \to \varphi$ $(n \to \infty)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ とすると

$$\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi} \ \ (n \to \infty) \ \ \text{in} \ \ \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$$

であるから $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}_n) \to T(\hat{\varphi}) = \hat{T}(\varphi)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．$\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．同様に $\check{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ である．

例 $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i0\cdot x} \varphi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx$$

これより

$$\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}$$

命題 6.8

$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ に対して $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[T]] = \mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[T]] = T$ である．

証明 $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[T]] = I$ を示す．$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ に対し

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[T]](\varphi) = \mathscr{F}[T](\check{\varphi}) = \hat{T}(\mathscr{F}^{-1}[\varphi]) = T(\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[\varphi]]) = T(\varphi)$$

であるから成り立つ．$\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[T]] = T$ も同様に示せる．□

6.3.3 L^2 空間における Fourier 変換

- $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とすると $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ との同一視により $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ とみなすことができるため，f の Fourier 変換を考えることができる．
- 次のことを示すことが目標である．
- まず次の事実は Lebesgue 積分論を利用して示される．ここでは省略する．

補題 6.11

$1 \leq p < \infty$ とする．任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ならばある $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$$

が成り立つ．

定理 6.9(Plancherel の定理)

$f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば同一視を介して $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ である．このとき

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

が成り立つ.

定理 6.10(Perseval の等式)

$f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば同一視を介して $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ である.

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

が成り立つ.

定理 6.9 の証明

- $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ について示す.
- まず補題 5.9（高次元版）と $\mathscr{F}[\overline{\mathscr{F}[f]} = \overline{\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]]}$ より

$$\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\mathscr{F}[\overline{\mathscr{F}[\varphi]}](y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\overline{\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[\varphi]](y)}dy = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

- 一般の $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ の場合は，$\|f - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を用いれば良い．□

定理 6.10 の証明

- $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ について示す.
- まず補題 5.9（高次元版）と $\mathscr{F}[\overline{\mathscr{F}[f]} = \overline{\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]]}$ より

$$\begin{aligned}
(\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\mathscr{F}[\overline{\mathscr{F}[\psi]}](y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\overline{\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[\psi]](y)}dy = (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

- 一般の $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ の場合は，$\|f - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $\|g - \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{\psi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を用いれば良い．□

- これらのことから次のことがわかる：

系 6.11

$\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ は線形，連続な全単射である．

- α を多重指数，$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ とする．多（単）項式 x^α と T の積 $x^\alpha T$ は

$$\langle x^\alpha T, \varphi\rangle := \langle T, x^\alpha \varphi\rangle \;\; (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

で定義する．ここで $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して $x^\alpha \varphi(x)$ も $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ であることに注意する．

- 一般には $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ で，ある $C > 0, m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^m$$

が成り立つとき f を**緩増加関数**ということがある．緩増加関数 f と $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ の積 fT は

$$\langle fT, \varphi\rangle := \langle T, f\varphi\rangle \;\; (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

で定義される．

- $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ に対してもその**（超関数）微分**が定義される．実際，α を多重指数，$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ とするとき，$D^\alpha T$ は

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

$D^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ であることは命題 1.3 と同様に示すことができる．