5 Fourier 変換

5.1 Fourier 変換の定義と性質

- 1 変数関数の Fourier 変換について述べよう.
- $L^1(\mathbb{R})$ を次で定義する：

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \middle| f : \text{Lebesgue 可測},\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

  を f の **Fourier 変換**といい，$\boldsymbol{\hat{f}(\xi)}$ ともかく.

- $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f = f(\xi)$ に対して

$$\mathscr{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi$$

  を f の **Fourier 逆変換**といい $\boldsymbol{\check{f}(x)}$ ともかく.

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ のとき

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$$

  より $\hat{f}$ は有界である．さらに Lebesgue の収束定理を用いれば $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ であることがわかる．実際,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

  において，被積分関数は $|e^{-i\xi x} f(x)| \leq |f(x)|$ で $|f(x)|$ は ξ に無関係な可積分関数なので Lebesgue の収束定理により，任意の $\xi_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\xi \to \xi_0} e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_0 x} f(x) dx = \hat{f}(\xi_0)$$

  が成り立つ.

命題 5.1

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とすると次が成り立つ：

(1) $\mathscr{F}[f^{(m)}](\xi) = (i\xi)^m \hat{f}(\xi)$

(2) $\mathscr{F}[x^m f](\xi) = i^m \hat{f}^{(m)}(\xi)$

(3) $\mathscr{F}^{-1}[f^{(m)}](x) = (-ix)^m \check{f}(x)$

(4) $\mathscr{F}^{-1}[\xi^m f](x) = (-i)^m \check{f}^{(m)}(x)$

証明 (1), (2) のみ示す．
(1)

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f'](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f'(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [e^{-i\xi x} f(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right\} \\
&= (i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = (i\xi) \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

ここで $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ であることを用いた．これを繰り返せばよい．
(2)

- $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$ より

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} f(x) dx$$

  である．

- ここで

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} + \widehat{ixf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \left\{ \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right\} f(x) dx$$

  が $h \to 0$ で 0 に収束することを示す．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．

- $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より，$f(x)$, $xf(x)$ は可積分である．したがって，ある $N > 0$ が存在して

$$\int_{|x|\geq N} |f(x)| dx < \varepsilon, \quad \int_{|x|\geq N} |xf(x)| dx < \varepsilon$$

が成り立つ．次に，$h_0 > 0$ をとり，$|x| \leq N$, $0 < |h| \leq h_0$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-ihx}-1}{h}+ix\right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|^{n-1}|x|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{h_0^{n-1}N^n}{n!} = \frac{1}{h_0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h_0^n N^n}{n!} \\ &= \left\{\frac{e^{h_0 N}-1}{h_0} - N\right\}\end{aligned}$$

したがってある h_0 があって $0 < |h| < h_0$ ならば

$$\sup_{|x|\leq N}\left|\frac{e^{-ihx}-1}{h}+ix\right| < \varepsilon$$

- 次に

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-ihx}-1}{h}+ix\right| &\leq \left|\frac{\cos(hx)-1}{hx}\right||x| + \left|\frac{\sin(hx)}{hx}\right||x| + |x| \\ &\leq C|x| \quad (C \text{ は無関係})\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\geq N} e^{-i\xi x}\left\{\frac{e^{-ihx}-1}{h}+ix\right\}f(x)dx\right| \\ \leq &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\geq N} C|x||f(x)|dx \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon\end{aligned}$$

- $0 < |h| < h_0$ ならば

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\leq N} e^{-i\xi x}\left\{\frac{e^{-ihx}-1}{h}+ix\right\}f(x)dx\right| \\ \leq &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon\int_{|x|\leq N} |f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx\end{aligned}$$

- したがって $0 < |h| < h_0$ ならば

$$\left|\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} + \widehat{ixf}(\xi)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$$

- これは

$$\lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}(-ix)f(x)dx$$

つまり

$$\therefore \quad \widehat{xf}(\xi) = i\hat{f}'(\xi)$$

を意味する．□

定理 5.2

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である．

証明

- $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ より $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば $\hat{f}$ は有界である．
- 命題 5.1 より，任意の $k,\, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$\frac{1}{i^k}\mathscr{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-ix)^l f]\right] = \xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)$$

  が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-ix)^l f]\right] &= i^k \xi^k \mathscr{F}[(-ix)^l f] \\ &= i^k \xi^k (-i)^l \mathscr{F}[x^l f] \\ &= i^k \xi^k (-i)^l i^l \hat{f}^{(l)}(\xi) = i^k \xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)\end{aligned}$$

- $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より $\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-ix)^l f] \in L^1(\mathbb{R})$ であるから $\xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)$ は有界である．
- $k,\, l$ は任意なので $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である．□
- $f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

  を f と g の**合成積**あるいは**たたみ込み**という．

定理 5.3

$f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である．

証明

- $f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より，積分記号下の微分が行えるので，任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$(f * g)^{(l)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f^{(l)}(x-y)g(y)dy$$

が成り立つ.

- 次に

$$\begin{aligned} 1+|x|^2 &\leq 1+(|x-y|+|y|)^2 \\ &\leq 1+|x-y|^2+2|x-y||y|+|y|^2 \\ &\leq 1+2(|x-y|^2+|y|^2) \leq 2(1+|x-y|^2)(1+|y|^2) \end{aligned}$$

である.

- 次に $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &|(1+|x|^2)^m (f*g)^{(l)}(x)| \\ &\leq 2^m \int_{\mathbb{R}} (1+|x-y|^2)^m (1+|y|^2)^m |f^{(l)}(x-y)g(y)|dy \\ &= 2^m \int_{\mathbb{R}} (1+|x-y|^2)^m |f^{(l)}(x-y)|(1+|y|^2)^m |g(y)|dy \\ &\leq 2^m \sup_{z\in\mathbb{R}} (1+|z|^2)^m |f^{(l)}(z)| \int_{\mathbb{R}} (1+|y|^2)^m |g(y)|dy \\ &\leq 2^m \sup_{z\in\mathbb{R}} (1+|z|^2)^m |f^{(l)}(z)| \int_{\mathbb{R}} (1+|y|^2)^{m+1}(1+|y|^2)^{-1} |g(y)|dy \\ &\leq 2^m \sup_{z\in\mathbb{R}} (1+|z|^2)^m |f^{(l)}(z)| \sup_{z'\in\mathbb{R}} (1+|z'|^2)^{m+1}|g(z')| \int_{\mathbb{R}} (1+|y|^2)^{-1} dy \end{aligned}$$

- $l,\, m$ は任意であるから $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である．□

命題 5.4

$f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき $\mathscr{F}[f*g](\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ が成り立つ.

解

- Fourier 変換の定義と Fubini-Tonelli の定理より

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right\} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)e^{-i\xi x} dx \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i\xi x} dx \right\} dy \end{aligned}$$

- $x-y=z$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(y)\left\{\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i\xi(y+z)}dz\right\}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y}\left\{\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i\xi z}dz\right\}dy \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i\xi z}dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y}dy\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

  を得る．□

注 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より，ある定数 $C>0$ が存在して

$$|f(x)|, |g(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}$$

が成り立つ．したがって

$$|f(x-y)g(y)e^{-i\xi x}| \leq \frac{C^2}{(1+|x-y|^2)(1+|y|^2)}$$

ここで

$$\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|x-y|^2)(1+|y|^2)}dx\right\}dy < \infty$$

であるから

$$\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)e^{-i\xi x}|dx\right\}dy < \infty$$

である．したがって Fubini-Tonelli の定理が使える．

5.2 Fourier の反転公式

定理 5.5

$\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ から $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ への連続写像である．

証明

- 定理 5.2 より $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば $\hat{f}, \check{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である．
- $\mathscr{F}$ について示す．

目標 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ におけるセミノルム系

$$p_k(f) = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^k |f^{(j)}(x)|$$

と $\{f_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} &{}^\forall k \in \mathbb{N} : p_k(f_n - f) \to 0 \quad (n \to \infty) \\ \Rightarrow \quad &{}^\forall k \in \mathbb{N} : p_k(\hat{f}_n - \hat{f}) \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

- ${}^\forall l, {}^\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$\begin{aligned} &\left| \xi^l \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \{\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)\} \right| \\ =&\left| \mathscr{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^l \{(-ix)^m (f_n(x) - f(x))\} \right] \right| \\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \{(-ix)^m \{f_n(x) - f(x)\}\} dx \right| \\ \leq&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^l \{x^m (f_n(x) - f(x))\} \right| dx \end{aligned}$$

- ここで

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{d}{dx}\right)^l \{x^m (f_n(x) - f(x))\} \right| \\ \leq& C(1+|x|^2)^m \sum_{j=0}^{l} |f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2} p_{m+1}(f_n - f) \end{aligned}$$

  である．ここで ある定数 $\tilde{C} > 0$ が存在して $|x|^j \leq \tilde{C}(1+|x|^2)^m$ $(1 \leq j \leq m)$ が成り立つことを用いた．

- したがって

$$\left| \xi^l \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \{\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)\} \right| \leq C p_{m+1}(f_n - f) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

  これより，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k(\hat{f}_n - \hat{f}) \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる．□

補題 5.6

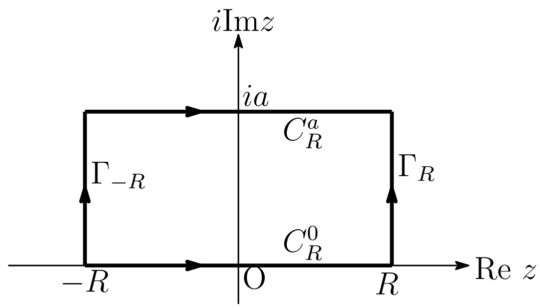
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2} dx = \sqrt{2\pi}$ が成り立つ．

証明

- 複素平面上の曲線（直線だけど）$C_R^0, C_R^a, \Gamma_R, \Gamma_{-R}$ を以下のようにとり

$$C_R = C_R^0 + \Gamma_R + (-C_R^a) + (-\Gamma_{-R})$$

とおく．



- $e^{-\frac{z^2}{2}}$ は正則であるから Cauchy の積分定理により

$$\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

である．

- ここで

$$\int_{C_R^0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \int_{C_R^a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x+ia)^2}{2}} dx$$

である．

- また Γ_R 上では $z = R + iat \ (0 \leq t \leq 1)$ であるから

$$|e^{-\frac{z^2}{2}}| = |e^{\frac{a^2t^2 - R^2 - 2Rati}{2}}| = e^{\frac{a^2t^2 - R^2}{2}} \leq e^{\frac{a^2 - R^2}{2}}$$

である．Γ_R の長さは $|a|$ より

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| \leq |a| e^{a^2 - R^2} \to 0 \ \ (R \to \infty)$$

である．同様に

$$\left| \int_{\Gamma_{-R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| \to 0 \ \ (R \to \infty)$$

である．

- したがって

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2} dx + \int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{\Gamma_{-R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

  である．

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ より上の式で $R \to \infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

  である．□

命題 5.7

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ならば $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ が成り立つ．

証明

- $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(i\xi x + \frac{x^2}{2}\right)} dx$ である．
- ここで $e^{-\left(i\xi x + \frac{x^2}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ より

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

  である．□

補題 5.8

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする．このとき

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) f(y) dy = f(x)$$

が成り立つ．

証明

- $I_\delta = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\delta^2}} f(y) dy$ とおく．

$$I_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x - \delta z) dz, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} f(x) dz$$

であるから

$$|I_\delta - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\{f(x-\delta z)-f(x)\}dz\right|$$

- $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より，ある $M>0$ があって $|f(x)| \le M$, $|f'(x)| \le M$ on $\mathbb{R}$ が成り立つ.
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる.
- このとき，ある $L>0$ が存在して

$$2M\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|z|\ge L} e^{-\frac{z^2}{2}}dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ.
- 次に $|f'| \le M$ より

$$|f(y)-f(y')| \le M|y-y'| \quad (y, y' \in \mathbb{R})$$

  したがって $\delta_0 = \dfrac{\varepsilon}{2ML}$ とし $0<\delta<\delta_0$, $|z| \le L$ ならば

$$|f(x-\delta z)-f(x)| \le M\delta|z| \le M\delta L < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ.
- したがって $0<\delta<\delta_0$ ならば

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon - f(x)| \le& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|z|\ge L} e^{-\frac{z^2}{2}}\{f(x-\delta z)-f(x)\}dz\right| \\ &\qquad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|z|\le L} e^{-\frac{z^2}{2}}\{f(x-\delta z)-f(x)\}dz\right| \\ \le& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|z|\ge L} e^{-\frac{z^2}{2}}2Mdz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|z|\le L} e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{\varepsilon}{2}dz = \varepsilon\end{aligned}$$

  が成り立つ. □

補題 5.9

f, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\hat{g}(y)dy$$

が成り立つ.

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} dy \right\} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y-x)} f(y) g(\xi) dy \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y-x)} f(y) dy \right\} g(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(x+y) dy \right\} g(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(x+y) g(\xi) dy \right\} d\xi
\end{aligned}
$$

- ここで Fubini-Tonelli の定理を用いると

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(x+y) g(\xi) d\xi \right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} g(\xi) d\xi \right\} dy = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

を得る．□

定理 5.9(Fourier の反転公式)

$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} = I$ on $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ が成り立つ．ただし I は恒等作用素である．

証明 $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = I$ を示す．

- $g(y) = e^{-y^2/2}$ とし，$\delta > 0$ に対し $g^\delta(y) = g(\delta y)$, $g_\delta(y) = (1/\delta) g(y/\delta)$ とおく．このとき

$$
\mathscr{F}[g^\delta](\xi) = g_\delta(\xi)
$$

が成り立つ（演習）．

- 補題 5.9 より

$$
\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) g^\delta(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) g_\delta(y) dy
$$

- 次に補題 5.8 より

$$
\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) g_\delta(y) dy = \sqrt{2\pi} f(x)
$$

である．

- 一方 $|g^\delta(\xi)| \leq 1$ で $\lim_{\delta \downarrow 0} g^\delta = 1$ であるから Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) g^\delta(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

である．

- 以上より

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = f(x)$$

を得る．$\square$