4 急減少関数の空間と Frechét 空間

4.1 急減少関数と Schwartz 空間

- 本節と次の節では Fourier 変換と相性がいい急減少関数の空間と Fourier 変換についての性質を述べる．
- $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ が
$$^\forall l, {}^\forall m \in \mathbb{N}; \sum_{|\alpha| \le l} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^m |D^\alpha v(x)| < \infty$$
を満たすとき，v を**急減少関数**といい，急減少関数全体を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ (あるいは $\mathscr{S}$) とかき，Schwartz 空間という．

問 1 $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ のとき次を示せ：
$$^\forall \alpha : \text{multi-index} \ : \ D^\alpha v(x) \to 0 \ \ (|x| \to \infty)$$

例 $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$

例 $e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ である（証明は各自）．

定義

$\{v_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N), v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ とする．
$$^\forall l, {}^\forall m \in \mathbb{N}; \sum_{|\alpha| \le l} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^m |D^\alpha v_n(x) - v(x)| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$
が成り立つとき，$\{v_n\}$ は v に **$\mathscr{S}$ の意味で収束する**といい，
$$v_n \to v \ \text{ in } \ \mathscr{S} \ \ (n \to \infty)$$
とかく．

4.2 Frechét 空間

定義（セミノルム）

X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$p : X \to \mathbb{R}$ が次の２つを満たすとき，p を X 上の**セミノルム**という：

(SN1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ($^\forall \lambda \in \mathbb{K}, {}^\forall x \in X$)

(SN2) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ ($^\forall x \in X, {}^\forall y \in X$)

注 セミノルムとはノルムの条件のうち「$\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = o$」を仮定しないものである．

例

(1) ノルム空間におけるノルムは当然セミノルムである．

(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ において $l, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_{l,m}(v) = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha v(x)|$$

はセミノルムである．

命題 4.1

p を X 上のセミノルムとすると次が成り立つ：

(1) $p(o) = 0$ (o は X の零ベクトル)

(2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ ($^\forall x, {}^\forall y \in X$)

(3) $p(x) \geq 0$ ($^\forall x \in X$)

証明

(1) $p(o) = p(0o) = 0p(o) = 0$

(2) $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ であるから $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$ が成り立つ．したがって $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$ が成り立つ．(SN1) より $p(x - y) = p(y - x)$ であるから

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

が成り立つ．

(3) (2) で特に $y = 0$ として $0 \leq |p(x)| \leq p(x)$ である．□

注 X 上に可算無限個のセミノルム $\{p_k\}$ が与えられたとき，$p_k \geq 0$ であるから

$$q_k(x) = \sum_{l=1}^{k} p_l(x)$$

とおくことにより，q_k もセミノルムであり，k に関して単調増加である．しかも簡単に

$$^\forall k \in \mathbb{N} \;:\; p_k(x_n - x) \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

であることと

$$^\forall k \in \mathbb{N} \;:\; q_k(x_n - x) \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

は同値であることも示される．したがって最初からセミノルム系は単調増加であると仮定してよい．

定理 4.2

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X に可算個のセミノルム $\{p_k\}$ $(k=1,\cdots)$ が定義されており，条件

$$
{}^{\forall}k \in \mathbb{N}; p_k(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=o \tag{4.1}
$$

を満たすとする．このとき

$$
d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \tag{4.2}
$$

とすると d は X 上の距離となる．

証明

- まず，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$
0 \leq \frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \leq \frac{1}{2^k}
$$

で $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<\infty$ より正項級数の比較判定法から $d(x,y)$ は定義される．

- 距離の条件 (D1)「$d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y$」を示そう．
- 前半は明らか．後半についても $x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ は明らか．
- $d(x,y)=0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}=0\\
\therefore\ &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}=0\\
\therefore\ &p_k(x-y)=0 \ \ ({}^{\forall}k)
\end{aligned}
$$

条件 (4.1) より $x-y=o$ つまり $x=y$ である．

- (D2)「$d(x,y)=d(y,x)$ は明らか」
- (D3)「$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ を示す」

- まず，関数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ は $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}\geq 0$ $(t\geq 0)$ より単調増加である．したがって $p_k(x-y)\leq p_k(x-z)+p_k(z-y)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} &\leq \frac{p_k(x-z)+p_k(z-y)}{1+p_k(x-z)+p_k(z-y)}\\
&= \frac{p_k(x-z)}{1+p_k(x-z)+p_k(z-y)}+\frac{p_k(z-y)}{1+p_k(x-z)+p_k(z-y)}\\
&\leq \frac{p_k(x-z)}{1+p_k(x-z)}+\frac{p_k(z-y)}{1+p_k(z-y)}
\end{aligned}
$$

である．両辺に $\dfrac{1}{2^k}$ をかけ，和をとれば $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ を得る．□

Frechét 空間の定義

- (4.2) で定義された距離に対して距離空間 (X,d) が完備距離空間であるとき，X を **Frechét 空間**という．

- X に高々可算のセミノルム $\{p_k\}$ が定義されているとする．$\{x_n\}\subset X$ がセミノルム p_k について **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して

$$
m,n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad p_k(x_m-x_n)<\varepsilon
$$

を満たすことである．

- X の点列 $\{x_n\}$ が各セミノルムについて Cauchy 列ならば，ある $x\in X$ が存在して

$$
{}^\forall k\in\mathbb{N}\ ;\ p_k(x_n-x)\to 0\ \ (n\to\infty)
$$

が成り立つとき，セミノルム系 $\{p_k\}$ は完備性をもつということにしよう．

定理 4.3

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X に高々可算個のセミノルム $\{p_k\}$ $(k=1,\cdots)$ が定義されており，条件 (4.1) を満たし，完備性をもつとする．このとき X は Frechét 空間となる．

証明

- (X,d) の完備性のみ示せば十分である．

- $\{x_n\}$ を (X,d) において Cauchy 列とする．

- このとき，任意の $l\in\mathbb{N}$ に対して，$\{x_n\}$ はセミノルム p_l に関して Cauchy 列であることを見よう．

- $l \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\{x_n\}$ は Cauchy 列より，ある $n_0 = n_0(l, \varepsilon) > 0$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x_m - x_n)}{1 + p_k(x_m - x_n)} < \frac{1}{2^l} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \tag{4.3}$$

が成り立つ．

- (4.3) より

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^l} \cdot \frac{p_l(x_m - x_n)}{1 + p_l(x_m - x_n)} < \frac{1}{2^l} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

つまり

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad p_l(x_m - x_n) < \varepsilon$$

を得る．よって $\{x_n\}$ は p_l に関して Cauchy 列である．

- $\{p_k\}$ は完備性をもつので，ある $x \in X$ が存在して

$$^\forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad p_k(x_n - x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．

- $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ を示そう．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．ある $K \in \mathbb{N}$ が存在して $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．

- $k = 1, \cdots, K$ に対して $p_k(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0, \quad k = 1, \cdots, K \quad \Rightarrow \quad p_k(x_n - x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- したがって $n \geq n_0$ ならば

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} < \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \sum_{k=1}^{K} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

である．

- 以上より $n \geq n_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

- これは $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ を意味する．□

問 2 $\{p_k\}$ を (4.1) を満たし，完備性をもつ単調増加なセミノルム系，X をそれから導かれる Frechét 空間，$\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ とする．

$$x_n \to x \ \ \text{in } X$$

つまり $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ であることは

$$^\forall k \in \mathbb{N} \ ; \ p_k(x_n - x) \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

であることと同値であることを示せ．

例 Ω を $\mathbb{R}^N$ の開集合とし，Ω の各点で連続な関数全体を $C(\Omega)$ とする．

$$K_n = \{x \in \Omega : |x| \leq n, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n\}$$

とすると K_n は有界閉集合で $K_n \subset \Omega$ である．$f \in C(\Omega)$ に対し，可算セミノルム系 $p_n(f)$ を次で定義する：

$$p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)| = \max_{x \in K_n} |f(x)|$$

このセミノルム系は条件 (4.1) を満たす．さらに完備性をもつため $C(\Omega)$ は (4.2) により Freché 空間となる．

定理 4.4

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ は Frechét 空間である．

証明

- セミノルム系 $\{p_k\}$ を次で定義する：

$$p_k(v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha v(x)|$$

- $\{p_k\}$ が完備性をもつことを示せばよい．

- $\{v_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ は各 p_k について Cauchy 列であるとする．

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |v_m(x) - v_n(x)| = p_0(v_m - v_n)$$

であるから $\{v_n\}$ は一様収束に関する Cauchy の条件を満たす．したがって，$\{v_n\}$ はある $v \in C(\mathbb{R}^N)$ に一様収束する．

- α を任意の多重指数とする．$k \geq |\alpha|$ ならば

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |D^\alpha v_m(x) - D^\alpha v_n(x)| \\ \leq &\sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^k |D^\beta v_m(x) - D^\beta v(x)| = p_k(v_m - v_n)\end{aligned}$$

であるから同様に $\{D^\alpha v_n\}$ は一様収束に関する Cauchy の条件を満たす．したがって，$\{D^\alpha v_n\}$ はある $v^{(\alpha)} \in C(\mathbb{R}^N)$ に一様収束する．

Claim 1: $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ で $D^\alpha v = v^{(\alpha)}$ が成り立つ．

- $|\alpha| = 1$, $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)$ の場合を考えよう．微積分の基本定理より，$a = (a_1, x')$, $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$v_n(x) - v_n(a) = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial v_n}{\partial x_1}(t, x')dt$$

である．v_n は v に $\dfrac{\partial v_n}{\partial x_1}$ は $v^{(\alpha)}$ に一様収束するから $n \to \infty$ として

$$v(x) - v(a) = \int_{a_1}^{x_1} v^{(\alpha)}(t, x')dt$$

- $v^{(\alpha)} \in C(\mathbb{R}^N)$ だから微積分の基本定理より

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = v^{(\alpha)}$$

である．この議論から $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ で，$|\alpha| = 1$ のとき Claim が成立することが示された．

- $|\alpha| = 2$ で $\alpha = (1, 1, 0, \cdots, 0)$ の場合を考えよう．

- 微積分の基本定理より，$a = (a_1, x')$, $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_n}{\partial x_2}(a) = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_2 \partial x_1}(t, x')dt$$

である．Claim 1 より $\dfrac{\partial v_n}{\partial x_2}$ は $\dfrac{\partial v}{\partial x_2}$ に $\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_2 \partial x_1}$ は $v^{(\alpha)}$ に一様収束するから $n \to \infty$ として

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v}{\partial x_2}(a) = \int_{a_1}^{x_1} v^{(\alpha)}(t, x')dt$$

- $v^{(\alpha)} \in C(\mathbb{R}^N)$ だから微積分の基本定理より

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} = v^{(\alpha)}$$

を得る．この議論により $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ で $|\alpha| = 2$ のとき Claim が示された．

- 以下同様にして Claim が示される．

Claim 2: 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k(v_n - v) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

- 任意に $k \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ をとる．p_k について $\{v_n\}$ は Cauchy 列であるからある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad p_k(v_m - v_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

つまり

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha v_m(x) - D^\alpha v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- これより，任意の $x \in \mathbb{R}^N$，$n \geq n_0$ なる任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1 + |x|^2)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v_m(x) - D^\alpha v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- $m \to \infty$ として入れ替えることにより

$$(1 + |x|^2)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v_n(x) - D^\alpha v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- 以上より $n \geq n_0$ ならば

$$p_k(v_n - v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha v_n(x) - D^\alpha v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

である．これは $\lim_{n \to \infty} p_k(v_n - v) = 0$ を意味する．k は任意なので $\{p_k\}$ は完備性をもつことがわかった．□

4.3　Baire の Category 定理と一様有界性原理

定理 4.5(Baire の category 定理)

(X,d) を完備距離空間とする．X が可算個の閉集合 F_n により $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ と表されるならば，少なくとも 1 つの F_n は内点をもつ．

証明

- 結論を否定し,「いかなる F_n も内点を含まない」と仮定する．
- 仮定より F_1 は内点を含まないので $F_1\neq X$ である．
- F_1^c は開集合で $F_1^c\neq\emptyset$ より，ある $x_1\in X$ とある $\varepsilon_1\in(0,1/2)$ が存在して $B_{\varepsilon_1}(x_1)\subset F_1^c$
- 仮定より F_2 は内点を含まないので $B_{\varepsilon_1/2}(x_1)\not\subset F_2$ である．よって開集合 $F_2^c\cap B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ は空でないため，ある $x_2\in X$ とある $\varepsilon_2\in(0,1/2^2)$ があって $B_{\varepsilon_2}(x_2)\subset B_{\varepsilon_1/2}(x_1)\cap F_2^c$ が成り立つ．
- 以下順に，$0<\varepsilon_n<1/2^n$, $x_n\in X$ $(n=1,2,\cdots)$ を
$$B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})\subset B_{\varepsilon_n/2}(x_n),\quad B_{\varepsilon_n}(x_n)\cap F_n=\emptyset$$
となるようにとることができる．
- $\{x_n\}$ は Cauchy 列であることを示そう．任意に $\varepsilon>0$ をとり，$n_0\in\mathbb{N}$ を $(1/2^{n_0})<\varepsilon$ となるようにとる．このとき $m>n\geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned}d(x_m,x_n)&\leq d(x_m,x_{m-1})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\\&\leq\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon\end{aligned}$$
である．したがって $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．したがってある x_∞ に収束する．
- ところで，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $m>n$ ならば
$$\begin{aligned}d(x_n,x_\infty)&\leq d(x_n,x_m)+d(x_m,x_\infty)\\&\leq\frac{\varepsilon_n}{2}+d(x_m,x_\infty)\to\frac{\varepsilon_n}{2}\quad(m\to\infty)\end{aligned}$$
- したがって $d(x_n,x_\infty)<\varepsilon_n$ つまり $x_\infty\in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ である．一方，$B_{\varepsilon_n}(x_n)\cap F_n=\emptyset$ より $x_\infty\notin F_n$ である．
- n は任意より $x_\infty\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ となるがこれは $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ に矛盾する．□
- X を Frechét 空間とするとき，X' を X 上の連続線形汎関数全体とする．

- $T : X \to \mathbb{K}$ が $x_0 \in X$ で連続であることの定義をもう一度確認すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |T(x) - T(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つことであった．また，線形性から T が X の各点で連続であることは，1 点 o で連続であることと同値である．

命題 4.6

$\{p_k\}$ を (4.1) を満たし，完備性をもつ単調増加なセミノルム系，X をそれから導かれる Frechét 空間とする．線形汎関数 $T : X \to \mathbb{K}$ が連続であるための必要十分条件は，ある $C > 0$ とある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|T(x)| \leq Cp_k(x) \quad (x \in X)$$

が成り立つことである．

証明

- 十分性は明らかである．
- 必要性を示そう．もし結論が成り立たないとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $x_n \in X$ が存在して

$$|T(x_n)| > np_n(x_n)$$

が成り立つ．$y_n = \dfrac{x_n}{|T(x_n)|}$ とおくと $|T(y_n)| = 1$ であるが，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq k$ ならば $p_k(y_n) \leq 1/n \to 0$ $(n \to \infty)$ である．したがって，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k(y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．
- **問 2** より $d(y_n, o) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．これは T の o での連続性に反する．□

定理 4.7(一様有界性原理（Frechét 空間 version））

$\{p_k\}$ を (4.1) を満たし，完備性をもつ単調増加なセミノルム系，X をそれから導かれる Frechét 空間とする．$\{T_j\} \subset X'$ が

$$\sup_j |T_j(x)| < \infty \quad {}^\forall x \in X$$

を満たすならば，ある $C > 0$ とある $k \in \mathbb{N}$ があって

$$|T_j(x)| \leq Cp_k(x) \quad {}^\forall j \in \mathbb{N}, \quad {}^\forall x \in X$$

が成り立つ．

証明

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ と 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_{n,j} = \{x \in X : |T_j(x)| \leq n\}, \quad A_n = \{x \in X : |T_j(x)| \leq n \ \ ({}^\forall j)\}$$

とおく．このとき T_j の連続性により $A_{n,j}$ は閉集合であり

$$A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n,j}$$

も閉集合である．さらに

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

が満たされる．

- 定理 4.5(Baire の categoty 定理) より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset A_{n_0}$ が成り立つ．A_n の定義から $-x_0$ も A_{n_0} の内点である．したがって $\dfrac{1}{2}x_0 + \dfrac{1}{2}(-x_0) = o$ も A_{n_0} の内点である ($\boxed{\textbf{問 3}}$参照)．

- したがって，ある $r_1 > 0$ が存在して $B_{r_1}(o) \subset A_{n_0}$ が成り立つ．いいかえると，ある $r_1 > 0$ が存在して

$$d(x, o) < r_1 \quad \Rightarrow \quad |T_j(x)| \leq n_0 \ \ ({}^\forall j \in \mathbb{N}) \tag{4.4}$$

が成り立つということである．

- 定理の主張が成り立たないとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $j_n \in \mathbb{N}$ と $x_n \in X$ が存在して

$$|T_{j_n}(x_n)| > np_n(x_n)$$

が成り立つ．

- $y_n = \dfrac{(n_0+1)x_n}{|T_{j_n}(x_n)|}$ とおく．このとき

$$|T_{j_n}(y_n)| = n_0 + 1 \tag{4.5}$$

である．

- 一方，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq k$ ならば

$$p_k(y_n) = \frac{n_0+1}{|T_{j_n}(x_n)|}p_k(x_n) \leq (n_0+1)\frac{p_k(x_n)}{np_n(x_n)} \leq \frac{n_0+1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

つまり，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$p_k(y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．これは$\boxed{\textbf{問 2}}$より $d(y_n, o) \to 0$ $(n \to \infty)$ を意味する．

- したがって (4.4) よりある $n \in \mathbb{N}$ に対して $|T_{j_n}(y_n)| \le n_0$ が成り立たなければならないが，これは (4.5) に反する．□

問 3 X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間で距離空間とする．$K \subset X$ を凸集合で $x_0, y_0 \in K$ を K の内点とする．このとき $tx_0 + (1-t)y_0$ は任意の $t \in [0,1]$ に対して K の内点であることを示せ．

系 4.8(Banach-Steinhaus の定理)

$\{p_k\}$ を (4.1) を満たし，完備性をもつ単調増加なセミノルム系，X をそれから導かれる Frechét 空間とする．$\{T_j\} \subset X'$ が任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} T_j(x)$$

が定まるならば

$$T(x) := \lim_{j\to\infty} T_j(x) \quad (x \in X)$$

で定義される T は $T \in X'$ である．

証明

- $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in X$ とすると

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{j\to\infty} T_j(\alpha x + \beta y) = \lim_{j\to\infty}(\alpha T_j(x) + \beta T_j(y)) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

  である．よって T は線形汎関数である．

- 次に T が連続であることを示す．任意の $x \in X$ に対して $\{T_j(x)\}$ は $\mathbb{K}$ の収束列はなので有界である．つまり任意の $x \in X$ に対して

$$\sup_j |T_j(x)| < \infty$$

  が成り立つ．

- したがって定理 4.7 より，ある $C > 0$ とある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|T_j(x)| \le C p_k(x) \quad ({}^\forall j \in \mathbb{N},\ {}^\forall x \in X)$$

  が成り立つ．この式で $j \to \infty$ とすると

$$|T(x)| \le C p_k(x) \quad ({}^\forall x \in X)$$

  が成り立つ．命題 4.6 より $T \in X'$ である．□