8　２重積分

- 多変数関数の積分を学ぶ.
- 関数 $z = f(x,y)$ のグラフは一般に $\mathbb{R}^3$ の曲面であり，xy 平面内の領域 D で $f(x,y) \geq 0$ である場合，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ 曲面 $z = f(x,y)$ と xy 平面の領域 D の間にある立体の体積に相当する.

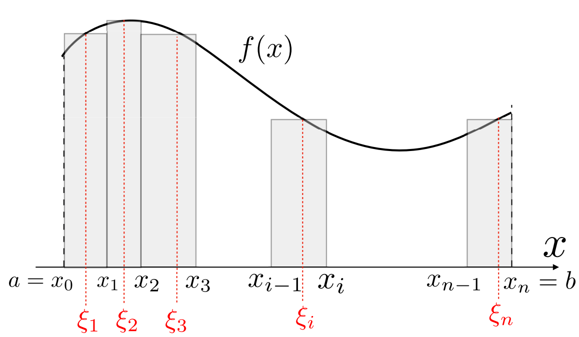
8.1　１変数関数の定積分（復習）

- 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ を考える.
- $[a,b]$ の**分割** Δ を考える.

$$
\begin{aligned}
&\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b, \\
&I = [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n), \\
&\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad |\Delta| = \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}
\end{aligned}
$$

- 各 I_i $(i = 1, \cdots, n)$ から代表点 ξ_i $(i = 1, \cdots, n)$ をとる.
- $f(x)$, $[a,b]$ の分割 Δ，代表点たち $\{\xi_i\}$ から **Riemann 和**

$$
R(f, \Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i
$$



が定まる.

- Riemann 和が分割 Δ や代表点たち $\{\xi_i\}$ の取り方によらず $|\Delta| \to 0$ とするとき，一定の値に近づくとき，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で**積分可能**であるといい，この値を

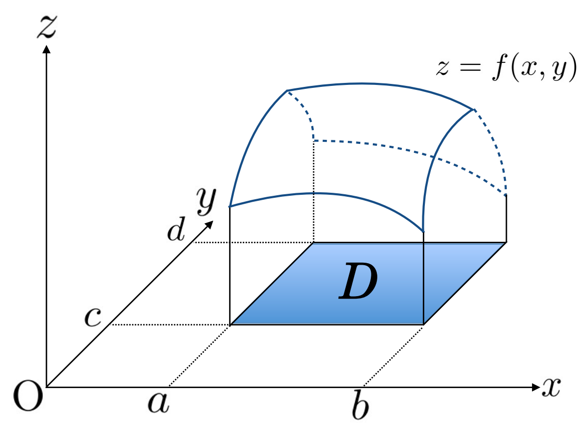
$$
\int_a^b f(x)dx
$$

とかき，$f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ における**定積分**というのであった.

- 正確には，$f(x)$ が $[a,b]$ で積分可能であるとは，ある $I \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
$$|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad {}^{\forall}\{\xi_i\},\ |R(f, \Delta, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$
が成り立つことである．
- $f(x) \geq 0$ on $[a,b]$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$, $x = b$, x 軸で囲まれた部分の面積である．
- $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば積分可能である．

8.2　長方形上の場合

- D を各辺が座標軸に平行な閉長方形とする：
$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \\ &= [a,b] \times [c,d] \text{ とかく} \end{aligned}$$
- D で定義された（有界な）関数 $f(x,y)$ を考える

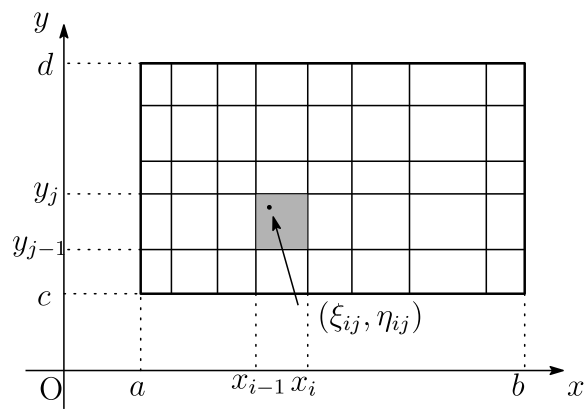


（$f(x,y) \geq 0$ のとき，曲面 $z = f(x,y)$ と長方形 D の間の立体を考えている.）

- $[a,b]$ を m 個，$[c,d]$ を n 個の小区間に分割し，その分割を Δ とする：
$$\Delta: \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{array}$$
この分割に対し
$$\begin{aligned} D_{ij} &= \{(x,y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n) \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \Delta y_j &= y_j - y_{j-1} \quad (j = 1, \cdots, n) \\ |\Delta| &= \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_m,\ \Delta y_1,\ \cdots, \Delta y_n\} \end{aligned}$$

とおく.

- 各 D_{ij} から代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) $\left(x_{i-1} \le \xi_{ij} \le y_i,\ y_{j-1} \le \eta_{ij} \le y_j\right)$ をとる



- 関数 $f(x,y)$，分割 Δ，代表点たち $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ から **Riemann 和**が定まる：

$$R = R\left(f, \Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

- R が分割 Δ や代表点たち $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ の取り方によらず $|\Delta| \to 0$ とするとき，一定の値に近づくとき $f(x,y)$ は D で**積分可能**であるといい，この値を

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

とかき，D における $f(x,y)$ の**積分** or **２重積分**という.

- （正確には，$f(x,y)$ が長方形 $[a,b] \times [c,d]$ で積分可能であるとは，ある $I \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|\Delta| < \delta \quad \Rightarrow \quad {}^{\forall}\{(\xi_{ij}, y_{ij})\},\ |R(f, \Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) - I| < \varepsilon$$

が成り立つことである.）

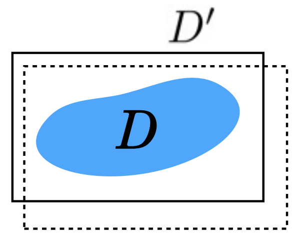
- $f(x,y)$ が D 上連続であるとき，D で積分可能である.

8.3　一般の領域上の場合

- 一般の有界領域 D の場合は $D \subset D'$ となる（各辺が座標軸と平行な）長方形をとり

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

とする.



$\tilde{f}(x,y)$ が領域 D' で積分可能であるとき $f(x,y)$ は D で積分可能であるといい

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} \tilde{f}(x,y)dxdy$$

とする．このときこの積分の値は D を含む長方形 D' の取り方によらない．また，$f(x,y)$ の積分可能性は領域 D の影響も受ける．

- 有界集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとき

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in D, \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

を D の**定義関数**という（定義関数自体は D は有界である必要はないが）．このとき $\chi_D(x,y)$ が上の意味で D 上積分可能であるとき，D は**面積確定**であるという．

- D が滑らかな曲線を有限個つないでできる曲線で囲まれた領域などは面積確定である．
- 面積確定な有界閉集合で定義された連続関数は積分可能である．

8.4 2重積分の性質

定理 8.1

D を面積確定集合，$f(x,y)$ は D 上で有界かつ積分可能であるとする．

(1) α, β を定数とすると

$$\iint_D \{\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\} dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy$$

(2) $f(x,y) \leq g(x,y)$ on D ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$

(3) $f(x,y)g(x,y)$ も D 上積分可能である．

(4) $m \leq f(x,y) \leq M$ on D （m, M : 定数） ならば

$$m|D| \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M|D|$$

(5) $\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy$

(6) $D = D_1 \cup D_2$ (D_1, D_2 は面積確定で $D_1 \cap D_2 = \emptyset$) のとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

8.5　２重積分の計算

8.5.1　長方形の場合

定理 8.2

- $D = [a,b] \times [c,d]$ とし，関数 $f(x,y)$ は D で連続であるとする．このとき，２重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ は次のように計算することができる．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \underbrace{\int_c^d f(x,y)dy}_{x\text{ を固定して }y\text{ について積分}} \right\} dx = \int_c^d \left\{ \underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{y\text{ を固定して }x\text{ について積分}} \right\} dy$$

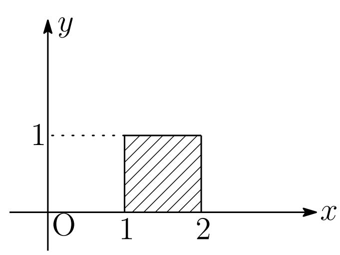
- このように１変数関数の積分を繰り返して２重積分を計算する方法を**累次積分**という．

例題 1

$D = [1,2] \times [0,1] (= \{(x,y) | 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\})$ のとき２重積分

$$\iint_D (x^2 - xy)dxdy$$

の値を求めよ．



解

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_1^2 \left\{ \underset{y\text{ の関数とみての積分 } \to x \text{ は定数扱い}}{\underline{\int_0^1 (x^2 - xy)dy}} \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \mathbf{\frac{19}{12}}
\end{aligned}
$$

次のように計算してもよい：

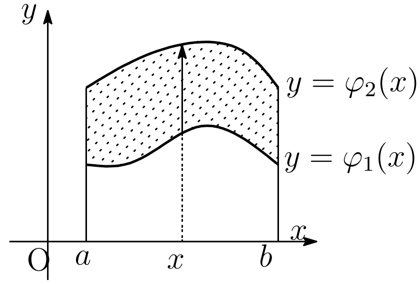
$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \underset{x\text{ の関数とみての積分 } \to y \text{ は定数扱い}}{\underline{\int_1^2 (x^2 - xy)dx}} \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=1}^{x=2} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2y \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y \right) \right\} dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}y \right) dy \\
&= \left[\frac{7}{3}y - \frac{3}{4}y^2 \right]_0^1 = \mathbf{\frac{19}{12}}
\end{aligned}
$$

8.6　縦線型領域・横線型領域

- 閉区間 $[a, b]$ 上で $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ を満たす連続関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を用いて D が

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

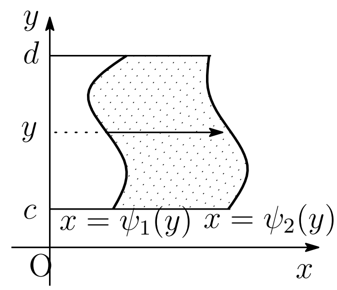
　と表される領域を**縦線型領域**という.



- 閉区間 $[c,d]$ 上で $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ を満たす連続関数 $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を用いて D が

$$D = \{(x,y) | c \leq y \leq d,\ \psi_2(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

と表される領域を**横線型領域**という.



定理 8.3

(1) $f(x,y)$ が縦線型領域

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
$$(\varphi_1(x), \varphi_2(x) : [a,b] \text{ で連続かつ } \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$$

で連続であるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

(2) $f(x,y)$ が横線型領域

$$D = \{(x,y) : c \leq x \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$
$$(\psi_1(y), \psi_2(y) : [c,d] \text{ で連続かつ } \psi_1(y) \leq \psi_2(y))$$

で連続であるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

系 8.4

D が

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) : c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

と２通りで表され，$f(x,y)$ が D で連続であるならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

このように累次積分の順序を入れ替えることを**積分の順序変更**という.

例題２

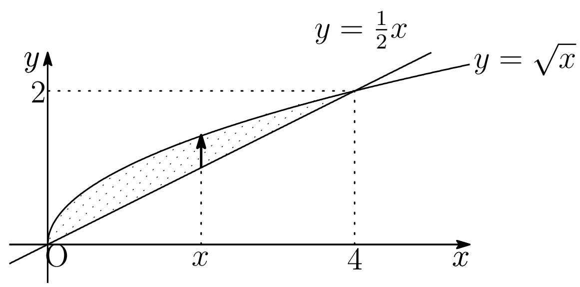
次の２重積分を累次積分で求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ D : 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = \dfrac{1}{2}x$ で囲まれた領域

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$ $D := \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq x \leq \sin y \right\}$

$\boxed{\text{解}}$ **必ず領域 D を図示する.**

(1) 領域 D を図示すると



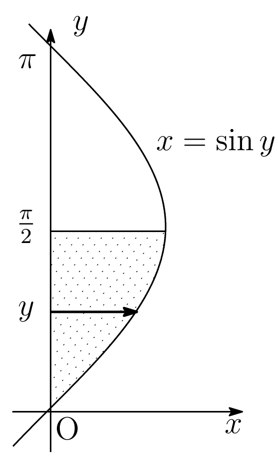
$D = \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq x \leq 4, \ \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$ と表されるので

$$\begin{aligned} \iint_D xydxdy &= \int_0^4 \left\{ \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} xydy \right\} dx \\ &= \int_0^4 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{32}x^4 \right]_0^4 = \frac{64}{6} - \frac{64 \cdot 4}{32} = \mathbf{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{注}}$ $D = \{(x,y) | 0 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le 2y\}$ とも表されるので

$$\iint_D xydxdy = \int_0^2 \left\{ \int_{y^2}^{2y} xydy \right\} dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=y^2}^{x=2y}$$
$$= \int_0^2 \left(2y^3 - \frac{1}{2}y^5 \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{12}y^6 \right]_0^2$$
$$= \frac{16}{2} - \frac{64}{12} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

(2) 領域 D を図示すると



$$\iint_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\sin y} xdx \right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=\sin y}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2y}{2} dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

例題３

累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy$ の値を求めよ．

指針

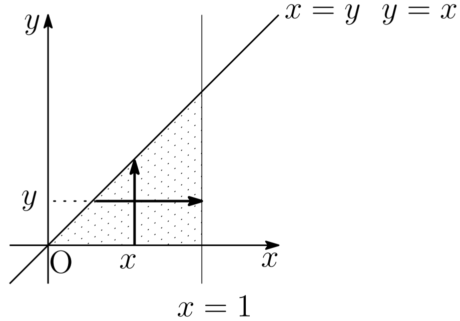
- そのまま計算しようとすると e^{-x^2} の積分を行わなければならないが $F'(x) = e^{-x^2}$ となる $F(x)$ は初等関数でかけないことが知られている（$\to$ 積分の順序変更を試みる）

- そのためには D をまず図示

$$\int_0^1 \left\{\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right\} dy$$

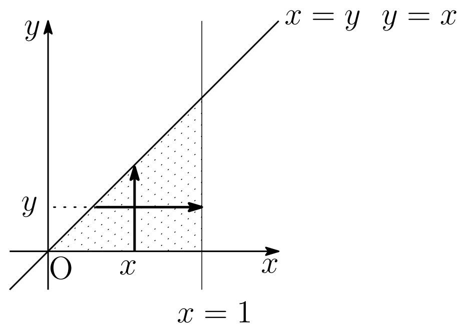
y を 1 つとめたとき，
$(x=)y$ から $(x=)1$ まで積分
(直線 $x=y$ と直線 $x=1$ で挟まれた領域)

y の範囲は 0 から 1 まで



$D=\{(x,y)|0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ と表される．

$\boxed{\textbf{解}}$ $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, y\le x\le 1\}=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ とすると



$$\int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$
$$= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_0^x e^{-x^2} dy}_{x\text{ は定数扱い}} \right\} dx = \int_0^1 \left[ye^{-x^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-x^2)' e^{-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

例題４

累次積分 $\displaystyle\int_0^\pi \left\{ \int_0^1 y \cos xy dy \right\} dx$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{注}}$ このままやろうとするとできない.

$$\int y \cos xy dy = \frac{y}{x} \sin xy - \int \frac{1}{x} \sin xy dy \quad \text{（余計難しくなる）}$$

$\boxed{\textbf{解}}$ $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ とする．このとき

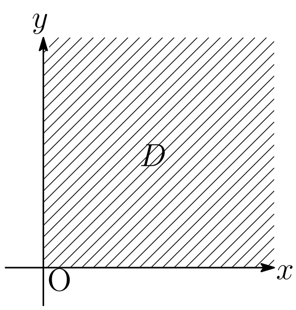
$$\int_0^\pi \left\{ \int_0^1 y \cos xy dy \right\} dx$$
$$= \iint_D y \cos xy dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^\pi y \cos xy dx \right\} dy$$
$$= \int_0^1 [\sin xy]_{x=0}^{x=\pi} dy = \int_0^1 \sin \pi y dy = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi y \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

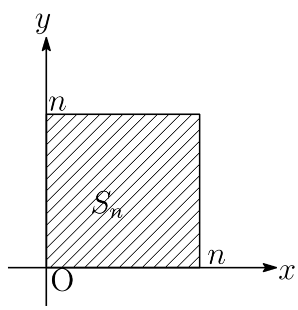
9 広義積分

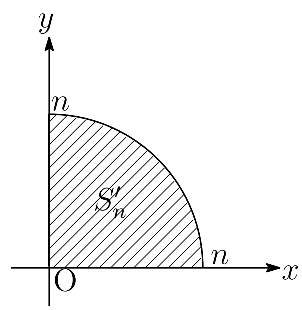
9.1 広義積分

- 今まで（閉）長方形や縦（横）線型領域など**面積確定**な**有界閉集合**上で（主に）連続な関数の２重積分を考えてきた．ここではそうではない積分を考える．２つの例を見てみよう．

例１ $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}$, $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$（有界でない）とき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ はどのように考えたら良いか？

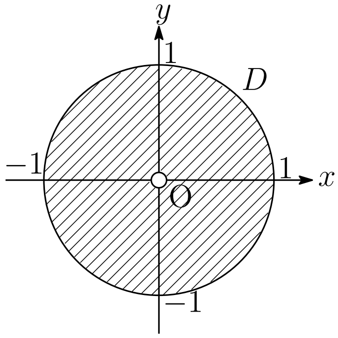


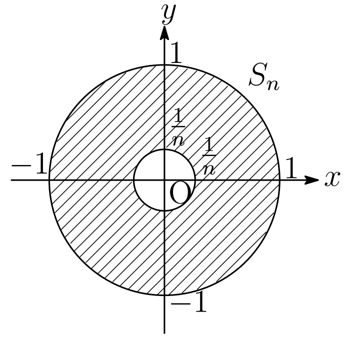




- $S_n = \{(x,y) : 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ とすると $S_1 \subset S_2 \subset \cdots S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = D$ である．
- このとき，各 n に対して $\displaystyle\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ は定まるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ とすればよいのではないか？
- $S'_n = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq n^2\}$ ではダメか？(計算できるかはさておいて)

例２ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ とき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ はどのように考えたら良いか？(定義域が閉集合ではなく，境界の点 $(0,0)$ で f が定義されていない)





- $S_n = \left\{(x,y) : \dfrac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$ とすると $S_2 \subset S_3 \subset \cdots S_n \subset S_{n+1} \subset$ であり $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = D$ である．

- このとき，各 n に対して $\displaystyle\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ は定まるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ とすればよいのではないか？

- D が必ずしも有界閉集合でない場合に，D 上の２重積分を定義するために次の定義をする．

- f は D で連続とする．

定義

次の条件を満たす面積確定の有界閉集合を D の**近似増加列**という：

(1) $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = D$

(2) $K \subset D$ なる任意の有界閉集合 K に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $K \subset S_{n_0} (\subset S_n)$ $(n \geq n_0)$ が成り立つ．

- $\{S_n\}$ を D の近似増加列とすると f は各 n に対して面積確定な有界閉集合 S_n で連続であるから $\displaystyle\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ が定まる．

定義

$f(x,y)$ は D で連続とする．D の任意の近似増加列 $\{S_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$$

が存在し，その極限値が近似増加列 $\{S_n\}$ に依らないとき，この極限値を $f(x,y)$ の D における**広義積分**といい

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と表す：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$$

次の２つの命題の証明は補足で行う（実はさほど難しくないが時間の都合上）.

命題 1

$f(x,y)$ は D で連続で $\underline{f(x,y) \geq 0}$ とする．D のある近似増加列 $\{S_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dxdy$$

が存在すれば，D の任意の近似増加列 $\{T_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f(x,y)dxdy$$

注

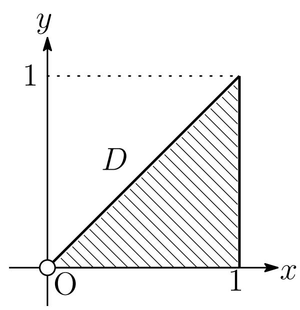
- $f(x,y) \leq 0$ on D でも ok
- つまり D 上で定符号であれば，あらゆる近似増加列に対して極限を吟味する必要はない.

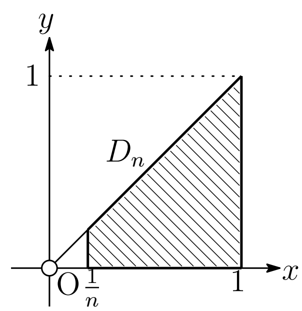
命題 2

$f(x,y)$ は D で連続で $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|dxdy$ が存在すれば $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ も存在する.

例題 1

$D = \{(x,y)|0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ のとき広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ を求めよ.





解 $D_n = \left\{(x,y)\middle|\frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とすると D_n は D の近似増加列である.

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

とおく．

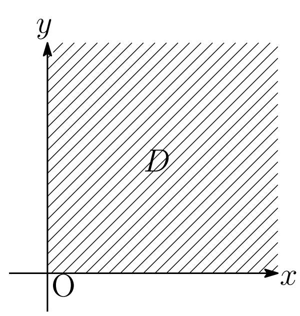
$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right\} dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\log(y + \sqrt{x^2+y^2}) \right]_{y=0}^{y=x} dx \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+A}} = \log|y+\sqrt{y^2+A}| + C, \quad y \geq 0 \text{ に注意} \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \log(x+\sqrt{2x^2}) - \log(\sqrt{x^2}) \right\} \quad (x \geq 0) \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\log((1+\sqrt{2})x - \log x) \right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \log(1+\sqrt{2}) dx = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

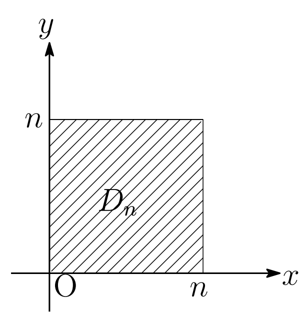
したがって $\lim_{n\to\infty} I_n = \log(1+\sqrt{2})$ である． $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 0$ であるから

$$
\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \log(1+\sqrt{2})
$$

例題２

$D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ とするとき広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy$ を求めよ．





$\boxed{\text{解}}$ $D_n = \left\{(x,y)\middle|0 \leq x \leq n,\ \ 0 \leq y \leq n\right\}$ とすると $\{D_n\}$ は D の近似増加列である．

$$
\begin{aligned}
&\iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy \\
=& \int_0^n \left\{ \int_0^n \frac{1}{(x+y+1)^4} dy \right\} dx \\
=& \int_0^n \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y+1)^3} \right]_{y=0}^{y=n} dx \qquad (y+x+1)^{-4} \text{ を } y \text{ で積分すると } -\tfrac{1}{3}(y+x+1)^{-3} \\
=& -\frac{1}{3} \int_0^n \left\{ \frac{1}{(x+n+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right\} dx \\
=& -\frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+n+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+n)^2} \right]_0^n \\
=& \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(\frac{1}{(n+1)^2} - 1 \right) \right\} \\
=& \frac{1}{6} \left\{ 1 - \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} \to \frac{1}{6} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

したがって

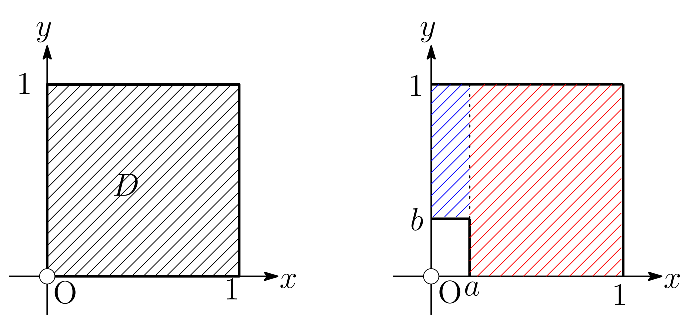
$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \frac{1}{6}$$

例題３

$D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \backslash \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ とするとき

$$\iint_D f(x,y) dxdy$$

は存在しないことを示せ．



$\boxed{\text{解}}$

- $D_{a,b} = [0,a] \times [b,1] \cup [a,1] \times [0,1]$ とする．

$$\iint_{D_{a,b}} f(x,y)dxdy = \int_0^a \left\{ \int_b^1 f(x,y)dy \right\} dx + \int_a^1 \left\{ \int_0^1 f(x,y)dy \right\} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(x,y) \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \left\{ \int_b^1 f(x,y)dy \right\} dx &= \int_0^a \left\{ \int_b^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy \right\} dx \\
&= \int_0^a \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=b}^{y=1} dx = \int_0^a \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{b}{x^2+b^2}\right) dx \\
&= \left[\tan^{-1} x - \tan^{-1} \frac{x}{b}\right]_0^a = \tan^{-1} a - \tan^{-1} \frac{a}{b} \\
\int_a^1 \left\{ \int_0^1 f(x,y)dy \right\} dx &= \int_a^1 \left\{ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy \right\} dx \\
&= \int_a^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_a^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \left[\tan^{-1} x\right]_a^1 = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} a
\end{aligned}$$

- よって

$$\iint_{D_{a,b}} f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{a}{b}$$

- $a = \dfrac{1}{n}, b = \dfrac{1}{n}$ とし，$S_n = D_{\frac{1}{n},\frac{1}{n}}$ とすると

$$\iint_{S_n} f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 1 = 0 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

- $a = \dfrac{1}{n}, b = \dfrac{\sqrt{3}}{n}$ とし，$S_n = D_{\frac{1}{n},\frac{\sqrt{3}}{n}}$ とすると

$$\iint_{S_n} f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12} \to \frac{\pi}{12} \quad (n \to \infty)$$

- したがって $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は存在しない．

9.2　補足

9.2.1　命題 9.1 の証明

- $f(x,y) \geq 0$, $S_n \subset S_{n+1}$, $T_n \subset T_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より
$$\iint_{S_n} f(x,y)dxdy, \quad \iint_{T_n} f(x,y)dxdy$$
は n について単調増加である．

- 任意の k に対し，$T_k \subset D$ なる有界閉集合であるから，ある $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ が存在して
$$T_k \subset S_{n_0} \subset S_n \quad (n \geq n_0)$$
が成り立つ．

- よって
$$\iint_{T_k} f(x,t)dxdy \leq \iint_{S_n} f(x,y)dxdy \leq \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dxdy < \infty$$

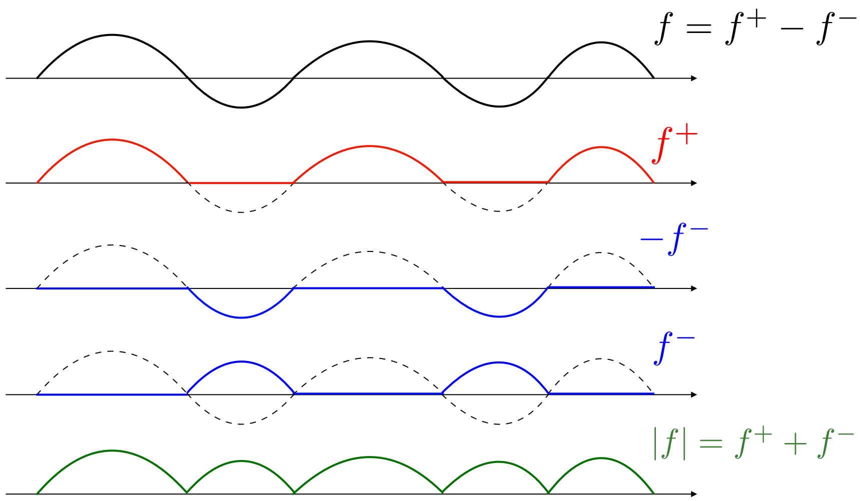
- よって $\displaystyle\iint_{T_k} f(x,y)dxdy$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は上に有界で単調増加である．

- したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f(x,y)dxdy$ は存在して
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f(x,y)dxdy \leq \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dxdy$$

- $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の立場を入れ替えれば
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dxdy \leq \lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f(x,y)dxdy$$
も成り立つ．$\square$

9.2.2　命題 9.2 の証明

- $f(x,y)$ に対して
$$f^+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}(\geq 0), \quad f^-(x,y) = \max\{-f(x,y), 0\}(\geq 0)$$
とおくと
$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y), \quad |f(x,y)| = f^+(x,y) + f^-(x,y)$$
であり
$$0 \leq f^+(x,y), f^-(x,y) \leq |f(x,y)|$$
である．



- さらに $f^+(x,y)$, $f^-(x,y)$ は連続である．
- $\{S_n\}$ を D の近似増加列とすると仮定より
$$\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n}|f(x,y)|dxdy = \int_D |f(x,y)|dxdy$$
- また
$$\iint_{S_n} f^+(x,y)dxdy \le \iint_{S_n}|f(x,y)|dxdy \le \iint_D |f(x,y)|dxdy \ (n=1,2,\cdots)$$
であり $\displaystyle\iint_{S_n} f^+(x,y)dxdy$ は上に有界で単調増加である．
- したがって $\displaystyle\iint_{S_n} f^+(x,y)dxdy$ が存在する．$f^+(x,y)\ge 0$ であるから命題 1 より極限は $\{S_n\}$ の取り方に依らない．$\displaystyle\iint_{S_n} f^-(x,y)dxdy$ についても同様．
- よって
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{S_n}\{f^+(x,y)-f^-(x,y)\}dxdy\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\iint_{S_n} f^+(x,y)dxdy - \iint_{S_n} f^-(x,y)dxdy\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f^+(x,y)dxdy - \lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f^-(x,y)dxdy\end{aligned}$$
最後の 2 つの極限値は $\{S_n\}$ の取り方に依らない．
- したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)dxdy$ は存在して極限値は $\{S_n\}$ の取り方に依らない．
$\square$

10　変数変換の公式

10.1　変数変換とは

- 変数 $x,\, y$ と変数 $u,\, v$ が関係

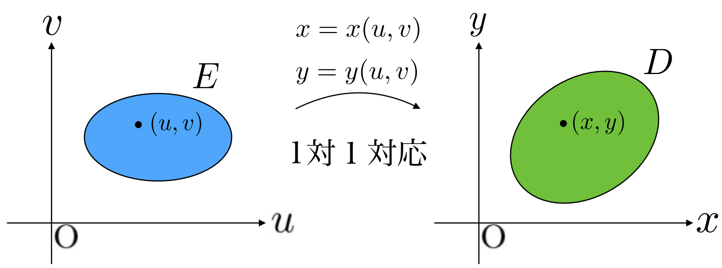
$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \qquad (10.1) \\ \textbf{古い変数} &= \textbf{新しい変数の式} \end{aligned}$$

によって対応づけられているとき，この関係を**変数変換**という．

- 変数変換 (10.1) により，$uv-$ 平面の点を 1 つ決めると $xy-$ 平面の点がただ 1 つ定まる．

- 次の仮定をする：

$uv-$ 平面の有界閉領域 E と $xy-$ 平面の有界閉領域 D が (10.1) により 1 対 1 対応する．



1 対 1 対応とは

- どんな $(x, y) \in D$ に対しても $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ となる $(u, v) \in E$ が存在する（**全射**）．

- $(u_1, v_1),\, (u_2, v_2) \in E$ が

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow (x(u_1, v_1), y(u_1, v_1)) \neq (x(u_2, v_2), y(u_2, v_2))$$

が成り立つ（**単射**）．

- このとき D で定義された関数 $f(x, y)$ は変数変換 (10.1) によって E で定義された (u, v) の関数となる：

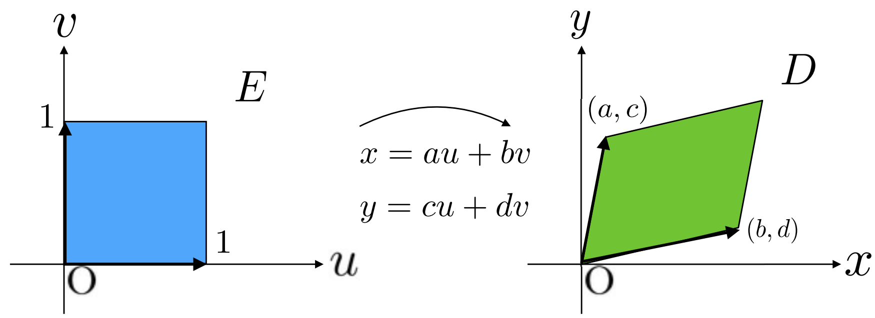
$$f(x(u, v), y(u, v)) \quad (u, v) \in E$$

変数変換の例

(1) **1次変換**

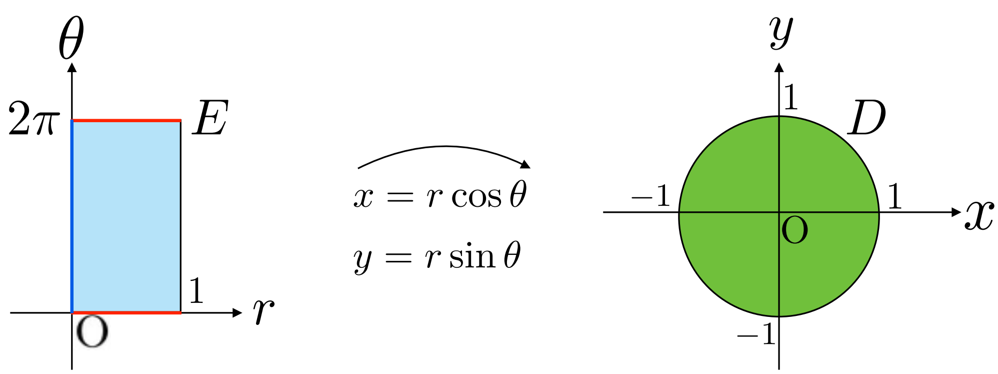
$$x = au + bv$$
$$y = cu + dv$$

は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則，つまり $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき 1 対 1 となる．



(2) **極座標**

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



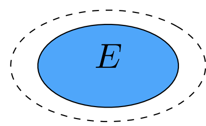
（厳密には 1 対 1 ではないが積分には影響しない．）

10.2　変数変換の公式

定理 10.1（変数変換の公式）

- 変数変換 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ により uv- 平面の有界閉領域 E と xy- 平面の有界閉領域 D が 1 対 1 に対応しているとする.
- $x(u,v)$, $y(u,v)$ は E の近傍で C^1 級で

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \textbf{(ヤコビアン)}$$



E の近傍

- このとき E が面積確定なら D も面積確定で D 上積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$$

（$|J|$ はヤコビアンの絶対値であることに注意）

- 定理が成り立つことを理解するためにまず次の事実を思い出しておこう.

補題

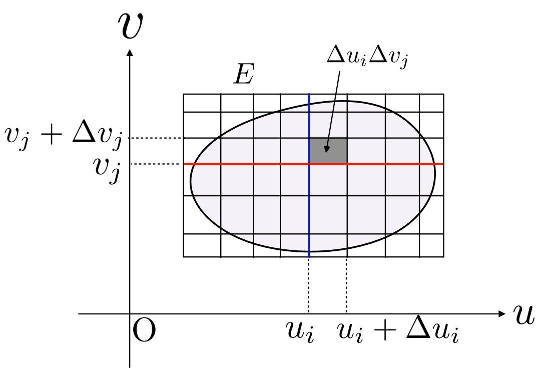
O$(0,0)$, A(a_1,a_2), B(b_1,b_2) とするとき

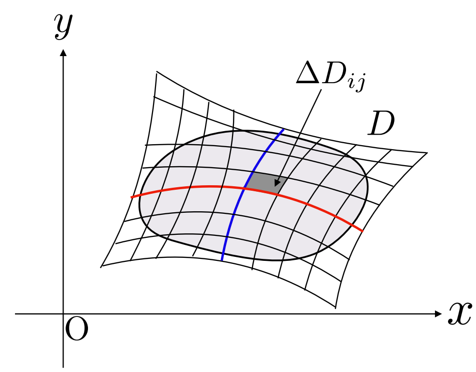
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,a_2), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,b_2)$$

を 2 辺とする平行四辺形の面積は

$$\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| \quad \text{行列式の絶対値}$$

定理の説明 定理が成り立つ雰囲気を感じ取ってもらうためにあえて曖昧な表現も含む.





- 座標変換の式 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ において
  - u を固定すると xy 平面内の v をパラメータとする曲線
  - v を固定すると xy 平面内の u をパラメータとする曲線

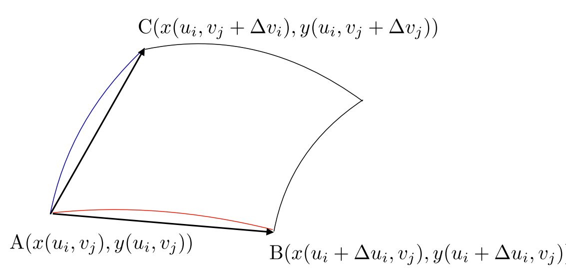
- E を含む辺が座標軸に平行な長方形を 1 つとり K とする．K を辺が座標軸に平行な微小長方形に分割すると xy 平面の領域 D は上で述べた曲線で網目状に分割される．K の分割を限りなく細かくすると D の分割も細かくなる．

- K の微小長方形 $[u_i, u_i + \Delta u_i] \times [v_j, v_j + \Delta v_j]$ （左図）に対応する D の区画の面積を ΔD_{ij} とすると

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim \sum_i \sum_j f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta D_{ij}$$

  と考えられる．

- ΔD_{ij} の面積を考えよう．



- A, B, C をそれぞれ

$$\mathrm{A}(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),\ \mathrm{B}(x(u_i + \Delta u_i, v_j), y(u_j + \Delta u_j, v_j)),$$
$$\mathrm{C}(x(u_i, v_j + \Delta v_j), y(u_j, v_j + \Delta v_j))$$

  とおく．ただし Δu_i, $\Delta v_j > 0$ とする．

- Δu_i, Δv_j が十分小さいとき ΔD_{ij} は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のつくる平行四辺形の面積で近似できる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x(u_i+\Delta u_i, v_j) - x(u_i, v_j) \\ y(u_i+\Delta u_i, v_j) - y(u_i, v_j) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u_i \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u_i \end{pmatrix} = \Delta u_i \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} x(u_i, v_j+\Delta v_j) - x(u_i, v_j) \\ y(u_i, v_j+\Delta v_j) - y(u_i, v_j) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v_j \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v_j \end{pmatrix} = \Delta v_j \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

- よって ΔD_{ij} は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j) \end{vmatrix} \Delta u_i \Delta v_j$$

  の絶対値で近似できる．

- 各 i, j に対して $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = (x(\rho_{ij}, \sigma_{ij}), y(\rho_{ij}, \sigma_{ij}))$ となる (ρ_{ij}, σ_{ij}) をとると

$$\begin{aligned} &\sum_j \sum_i f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta D_{ij} \\ =&\sum_j \sum_i f(x(\rho_{ij}, \sigma_{ij}), y(\rho_{ij}, \sigma_{ij}))|J|\Delta u_i \Delta v_j \\ \to&\iint_E f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv \end{aligned}$$

  を得る．

- $|J|$ はヤコビアンの絶対値であることに注意．

系 10.2

xy 平面の領域 D は極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により $r\theta$ 平面の領域 E と対応するとする．このとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\boldsymbol{r}drd\theta$$

証明 $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ となる (r,θ)($r > 0$, $o \leq \theta < 2\pi$) がただ 1 つ定まるので 1 対 1 対応である．

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \geq 0$$

であるので定理 10.1 より上の公式が成り立つ．□

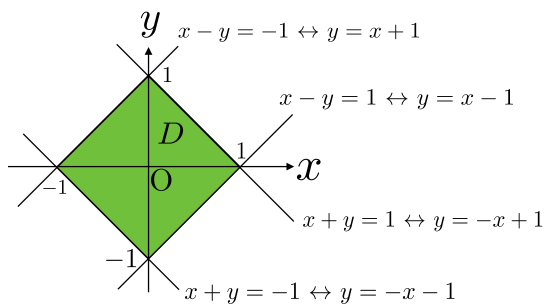
10.3 例題演習

例題 1

$D=\{(x,y)|-1\leq x+y\leq 1,\ -1\leq x-y\leq 1\}$ のとき

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}dxdy$$

を求めよ.

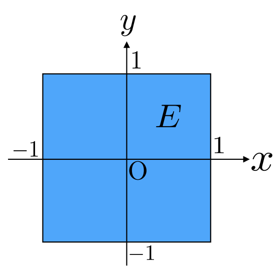


解

- $x+y=u,\ x-y=v$ とおくと D は

$$E=\{(u,v)|-1\leq u\leq 1,\ -1\leq v\leq 1\}$$

である.



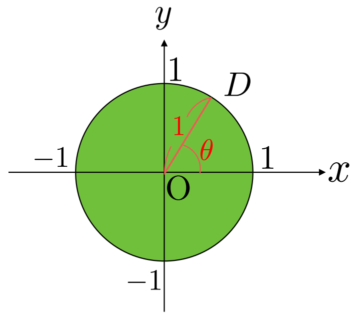
- また $x+y=u,\ -y=v$ より $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$ （本来の変数変換の形）で

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}dxdy = \iint_E \sqrt{u+1}|J|dudv = \iint_E \sqrt{u+1}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$
$$=\iint_E \sqrt{u+1}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}\sqrt{u+1}du\right\}dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{u=-1}^{u=1}dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}dv = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

例題２

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ とするとき $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.



解 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により D に対応する $r\theta-$ 平面の領域 E は

$$E=\{(x,y)|0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi\}\quad (\leq 2\pi\text{でも OK})$$

したがって

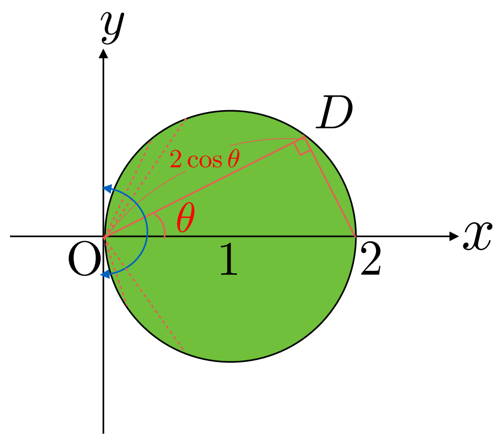
$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_E \sqrt{r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r^2dr\right\}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=1}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta = \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

例題３

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x\}$ のとき $\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

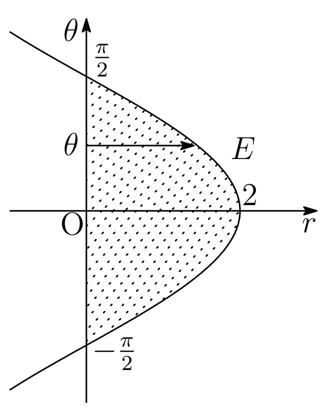
解

- $x^2+y^2\leq 2x$ を変形すると $(x-1)^2+y^2\leq 1$ なので領域 D は円 $(x-1)^2+y^2=1$ とその内部である．



- 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ によって D は $r\theta-$ 平面の領域

$$E=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq 2\cos\theta\right\}$$



となる．

- $\sqrt{4-x^2-y^2} = \sqrt{4-r^2}$ より

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy &= \iint_E \sqrt{4-r^2}rdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}rdr \right\} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}(2r)dr \right\} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} \right\} d\theta
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&4-4\cos^2\theta = 4(1-\cos^2\theta) = 4\sin^2\theta \\
&(4-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 8|\sin^3\theta| \qquad (a^2)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a^2})^3 = |a|^3 = |a^3|
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
与式 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3}(8|\sin^3\theta| - 8) \right\} \right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}(1-|\sin^3\theta|)d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta \\
&= \frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}
$$

を用いた.

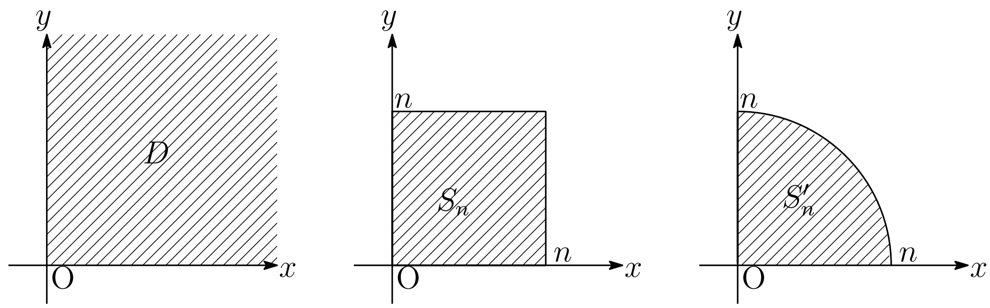
10.4　広義積分への応用

例題４

$D=\{(x,y)|x\geq 0,\quad y\geq 0\}$ のとき

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}dxdy$$

を求めよ．

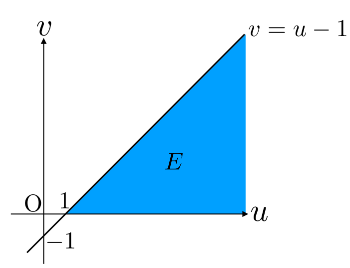


$\boxed{\text{解}}$

- $\begin{cases} x+y+1 & =u \\ y & =v \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} x= & u-v-1 \\ y= & v \end{cases}$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v-1\geq 0 \\ v\geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ 0\leq v\leq u-1$$

より D は $E=\{(u,v)|u\geq 1,\ 0\leq v\leq u-1\}$ と対応する．



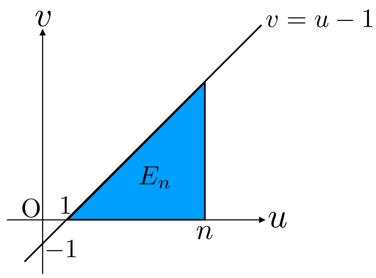
- E の近似増加列として

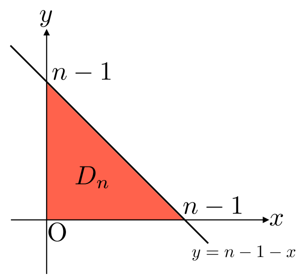
$$E_n=\{(u,v)|1\leq u\leq n,\ 0\leq v\leq u-1\}$$

とおくと E_n は

$$D_n=\{(x,y)|0\leq x\leq n-1,\ 0\leq y\leq n-1-x\}$$

と対応する．





$$\left(\begin{array}{l} \bullet\ 1 \leq u \leq n \quad \leftrightarrow \quad 0 \leq x + y \leq n - 1 \quad \leftrightarrow \quad -x \leq y \leq n - 1 - x \\ \bullet\ v \leq u - 1 \quad \leftrightarrow \quad x \geq 0 \\ \bullet\ v \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad y \geq 0 \end{array}\right)$$

- 次に

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- D_n は D の近似増加列で $\frac{1}{(x+y+1)^4} \geq 0$ より

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy$$

- ここで

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \iint_{E_n} \frac{1}{u^4} |J| dudv \\
=& \int_1^n \left\{ \frac{1}{u^4} dv \right\} du = \int_1^n \left[\frac{v}{u^4} \right]_{v=0}^{v=u-1} du \\
=& \int_1^n \frac{u-1}{u^4} du = \int_1^n \left\{ \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4} \right\} du \\
=& \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^3} \right]_1^n = \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
=& \frac{1}{6} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \to \frac{1}{6} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

- したがって $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \frac{1}{6}$

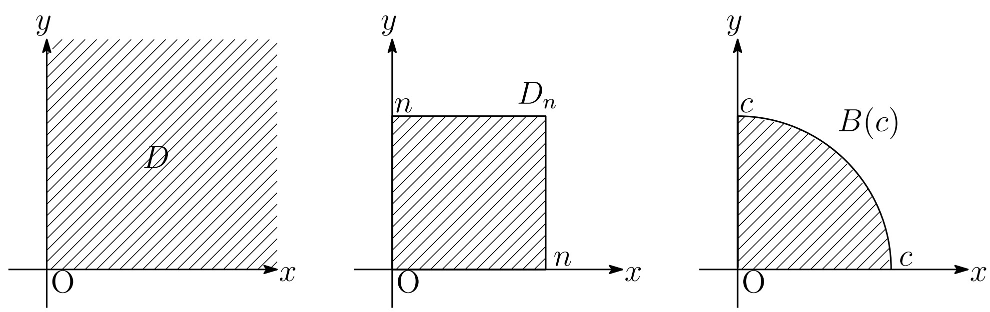
例題５

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．

注 $F'(x) = e^{-x^2}$ となる関数 $F(x)$ は初等関数で表すことができない．$\to e^{-(x^2+y^2)}$ の二重積分を利用する．

解

- $D = \{(x,y)|x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．



- D の近似増加列として $D_n = [0,n]\times[0,n]$ をとると

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^n \left\{\int_0^n e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right\}dy$$
$$= \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2$$

よって

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

である．

- 次に

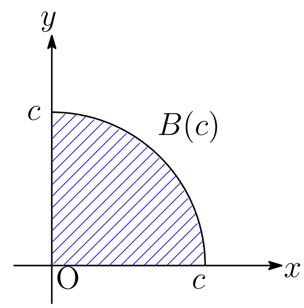
$$B(c) = \{(x,y)|x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq c^2\} \quad (c>0)$$

とおく．

- 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により $B(c)$ は

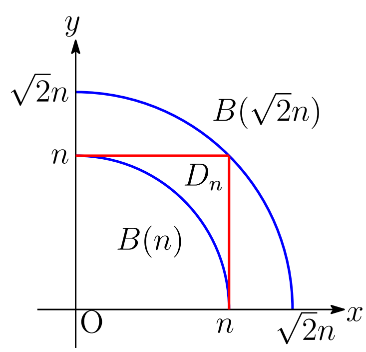
$$F(c) = \left\{(r,\theta)\middle|0 \leq r \leq c,\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

に対応するので



$$\iint_{B(c)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{F(c)} e^{-r^2} r dr d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^c e^{-r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^c e^{-r^2}(-2r)dr \right\} d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=c} \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-e^{-c^2})d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-c^2})$$

- $n = 1, 2, \cdots$ に対して $B(n) \subset D_n \subset B(\sqrt{2}n)$ で $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$ より



$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

- よって

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \leq \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2n^2})$$

- $n \to \infty$ とすると

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \to 0, \quad \frac{\pi}{4}(1-e^{-2n^2}) \to 0, \quad \int_0^n e^{-x^2}dx \to \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

であるので

$$\frac{\pi}{4} \leq \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

したがって $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

例題６

ガンマ関数とベータ関数は関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

注

- $\displaystyle\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$
  - $0 < s < 1$ のとき $e^{-x}x^{s-1}$ は $x = 0$ で特異性をもつ.
- $\displaystyle B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \ (p,\ q > 0)$
  - $0 < p < 1$ のとき $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は $x = 0$ で特異性をもつ.
  - $0 < q < 1$ のとき $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は $x = 1$ で特異性をもつ.

解

- $\displaystyle\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$ において $x = t^2$ とおくと

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2(s-1)} \cdot 2t dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-1} dt$$

- $\displaystyle B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \ (p,\ q > 0)$ において $x = \cos^2\theta$ とおくと ($\cos\theta \geq 0$, $\sin\theta \geq 0$ ($\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$))

$$B(p, q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2(p-1)}\theta \sin^{2(q-1)}\theta (-2\cos\theta\sin\theta) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$$

- このとき $D=\{(x,y)|x>0,\ y>0\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right) \\
&= 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy
\end{aligned}$$

- ここで極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により D は

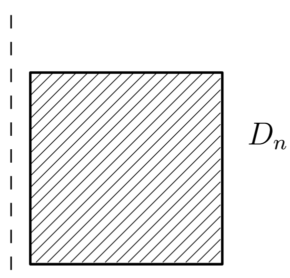
$$E=\left\{(r,\theta)\middle|r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

に対応するので

$$\begin{aligned}
&4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy \\
\overset{\text{(ii)}}{=}\ &4\iint_E e^{-r^2}(r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta)(r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta)rdrd\theta \\
=\ &4\iint_E e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta drd\theta \\
=\ &\left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\right) \\
=\ &\Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

注

- (i) の part：$D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ の近似増加列として $D_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[\frac{1}{n},n\right]$ として



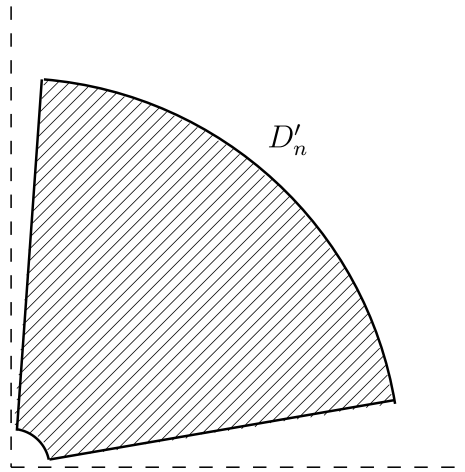
$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy=\left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right)$$

であるので $n\to\infty$ とすればよい（関数がすべて非負なので，広義積分については特定の近似増加列を取ればよい）．

- (ii) の part：D の近似増加列として図のような D_n' をとる，具体的には極座標で表したとき

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \middle| \frac{1}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n},\ \frac{1}{n} \leq r \leq n \right\}$$

となる領域である．



このとき

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n'} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy \\
=& \iint_{E_n} e^{-r^2} (r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta)(r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta) r dr d\theta \\
=& \iint_{E_n} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta dr d\theta \\
=& \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta dr \right\} d\theta \\
=& \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \right)
\end{aligned}$$

この式で $n \to \infty$ とすればよい．