7　極値

7.1　極値とは

- 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) のある近傍 U で
$$f(x,y) < f(a,b) \ \ ((x,y) \in U,\ (x,y) \neq (a,b))$$
が成り立つとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で**極大**であるといい，$f(a,b)$ を**極大値**という．

- 同様に
$$f(x,y) > f(a,b) \ \ ((x,y) \in U,\ (x,y) \neq (a,b))$$
が成り立つとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で**極小**であるといい，$f(a,b)$ を**極小値**という．

- 極大値と極小値をあわせて**極値**という．

- 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能であるとき，$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば，$y=b$ と固定して得られる関数 $f(x,b)$ は $x=a$ で極値をとるので
$$\frac{d}{dx}f(x,b)\Big|_{x=a} = 0 \quad \text{つまり} \quad f_x(a,b) = 0$$
が得られる．同様に $f_y(a,b)=0$ である．

命題 7.0

関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で定義されており，(a,b) で偏微分可能とする．このとき $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つ．

例 7.1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

- $f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = 2y$ より $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる (a,b) は $(a,b) = (0,0)$ のみ．

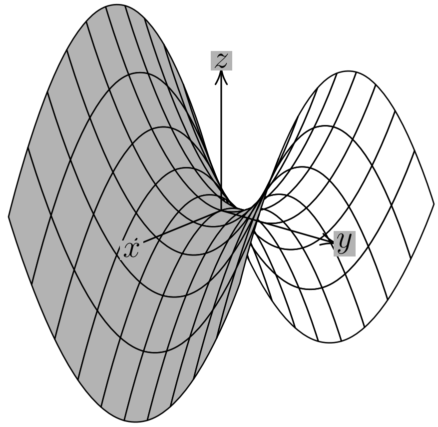
- $f(0,0) = 0$ かつ $f(x,y) > 0\ ((x,y) \neq (0,0))$ より $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小，極小値は 0 である（実際，最小値になっている）．

例 7.2 $f(x,y) = -x^2 + y^2$

- $f_x(x,y) = -2x,\ f_y(x,y) = 2y$ より $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる (a,b) は $(a,b) = (0,0)$ のみであるが $(0,0)$ では極値をもたない．

- 実際 $f(x,0) = -x^2$ は $x=0$ で極大，$f(0,y) = y^2$ は $y=0$ で極小である．

- つまり $f(0,0) = 0$ だが $(0,0)$ のどんな ε 近傍にも $f(x,y) > 0$ となる点と $f(x,y) < 0$ となる点がある．したがって $(0,0)$ で極値をとらない．



7.2 極値の判定

定理 7.1

関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で C^2 級で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たすとする.

$$\Delta=\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

とおいたとき

(1) $\Delta<0$, $f_{xx}(a,b)<0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大

(2) $\Delta<0$, $f_{xx}(a,b)>0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小

(3) $\Delta>0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない.

注 $\Delta=0$ のときは極値をとるともとらないとも言えない.

証明

- Taylor の定理（$n=2$）より $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ならば $|h|$, $|k|$ が十分小さいとき

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)\\
=&f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h,b+\theta k)\\
=&f(a,b)+\{f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\{f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk+f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\}\\
=&f(a,b)+\frac{1}{2!}\{f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk+f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\}
\end{aligned}$$

となる $\theta\in(0,1)$ が存在する.

- ここで $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=f_{yy}(a,b)$ とおき，さらに
$$\begin{aligned} f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) &= A+\varepsilon_1, \\ f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) &= B+\varepsilon_2, \\ f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) &= C+\varepsilon_3 \end{aligned}$$
とおけば f は C^2 級であるから $\varepsilon_i \to 0$ (as $(h,k)\to(0,0)$) $(i=1,2,3)$ が成り立つ.

- したがって
$$\begin{aligned} & f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ =& \frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1 h^2+2\varepsilon_2 hk+\varepsilon_3 k^2) \end{aligned}$$

- $\varepsilon(h,k)=\varepsilon_1 h^2+2\varepsilon_2 hk+\varepsilon_3 k^2$ とおき，$\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ とおくと
$$\begin{aligned} & f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ =& \frac{1}{2}\rho^2\left\{A\left(\frac{h}{\rho}\right)^2+2B\left(\frac{h}{\rho}\right)\left(\frac{k}{\rho}\right)+C\left(\frac{k}{\rho}\right)^2+\frac{\varepsilon(h,k)}{\rho^2}\right\} \end{aligned}$$

- ここで次のことに注意する.
  (i) $u=\dfrac{h}{\rho}$, $v=\dfrac{k}{\rho}$ は $u^2+v^2=1$ をみたす.
  (ii)
$$\begin{aligned} |\varepsilon(h,k)| &\le |\varepsilon_1||h|^2+2|\varepsilon_2||hk|+|\varepsilon_3||k|^2 \\ &\le |\varepsilon_1||h|^2+|\varepsilon_2|(|h|^2+|k|^2)+|\varepsilon_3||k|^2 \\ &\le (|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|)(h^2+k^2) \end{aligned}$$
  だから $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\rho^2}=0$ をみたす.

(1) $\boldsymbol{\Delta=B^2-AC<0,\ A<0}$ のとき

- 平方完成すると
$$\begin{aligned} & Au^2+2Buv+Cv^2 \\ =& A\left(u^2+2\frac{B}{A}uv+\frac{B^2}{A^2}v^2\right)+\frac{AC-B^2}{A}v^2 \\ =& A\left(u+\frac{B}{A}v\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}v^2<0 \quad (u^2+v^2=1 \text{ だから } (u,v)\ne(0,0)) \end{aligned}$$
より $Au^2+2Buv+v^2$ は円 $u^2+v^2=1$ 上で負の最大値 $-m<0$ $(m>0)$ をとる
$$Au^2+2Buv+Cv^2\le -m$$

- 一方 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\rho^2} = 0$ より，ある $\delta > 0$ があって

$$0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\varepsilon(h,k)}{\rho^2}\right| < \frac{m}{2}$$

が成り立つ．したがって $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$ ならば

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \leq \frac{1}{2}\rho^2\left(-m+\frac{m}{2}\right) \leq -\frac{1}{4}\rho^2 m < 0$$

したがって (a,b) で極大となる．

(2) $\Delta < 0$, $A > 0$ のとき

同様にして f は (a,b) で極小となる．

(3) $\Delta > 0$ のとき

- 例えば $A > 0$ ならば

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A\left(u + \frac{B}{A}v\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}v^2$$

であるが

$$u + \frac{B}{A}v = 0 \ \text{ ならば } \ Au^2+2Buv+Cv^2 < 0$$
$$u = 1, v = 0 \ \text{ ならば } \ Au^2+2Buv+Cv^2 = A > 0$$

なので h, k の取り方により (a,b) の近傍で $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ の符号は正にも負にもなる．よって極値をとらない．

以上で示された．□

注 2次の正方行列（実対称行列）

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = D^2 f(a,b),\ H_f(a,b) \text{ ともかく）}$$

を**ヘッセ行列**といい，その行列式を**ヘシアン**という：

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2 = -\Delta$$

(1) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値がすべて負

(2) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値がすべて正

(3) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値が異符号

また，$\Delta = 0$ は $H = 0$ と同値であり，ヘッセ行列が 0 を固有値にもつことと同値である．

例題 1

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ の極値を求めよ．

解

- $f_x(x, y) = 2x + y - 4,\ f_y(x, y) = x + 2y - 2$ であるから，極値をとる点では

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

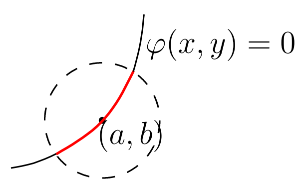
  これを解くと $(x, y) = (2, 0)$ である．

- $f_{xx}(x, y) = 2,\ f_{xy}(x, y) = 1,\ f_{yy}(x, y) = 2$ であるから $f_{xx}(2, 0) = 2,\ f_{xy}(2, 0) = 1,\ f_{yy}(2, 0) = 2$ であるので $\Delta = 1^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0,\ f_{xx}(2, 0) > 0$ である．

- よって $f(x, y)$ は点 $(2, 0)$ で極小値 $f(2, 0) = -4$ をとる．

7.3 条件付き極値問題

- 変数 x, y が条件 $\varphi(x, y) = 0$ のもとで変化するとき関数 $f(x, y)$ の極値を求める問題（**条件付き極値問題**）を考える．



定理 7.2

関数 $f(x, y),\ \varphi(x, y)$ は点 (a, b) の近傍で C^1 級とする．$z = f(x, y)$ は $\varphi(x, y) = 0$ という条件のもとで極値をとるとする．このとき $\varphi_x(a, b) \neq 0$ あるいは $\varphi_y(x, y) \neq 0$ ならば，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{cases} f_x(a, b) - \lambda\varphi_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) - \lambda\varphi_y(a, b) = 0 \\ \varphi(a, b) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

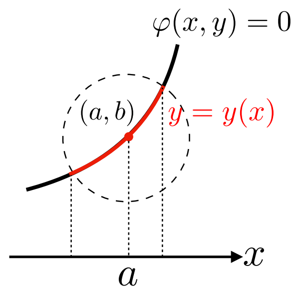
証明 $\varphi_y(a, b) \neq 0$ として証明する．

- 陰関数定理より，点 (a,b) の近傍では $\varphi(x,y)=0$ は a を含むある開区間 I で定義された x の関数 $y=y(x)$ のグラフとして表され，

$$y'(x) = -\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$$

として表される．

- よって $\varphi(x,y)=0$ という条件のもと，(a,b) の近傍では $f(x,y)$ は $z=f(x,y(x))$ と x の関数となる．



- (a,b) で（条件付き）極値をとるのだから $f(x,y(x))$ は $x=a$ で極値をとる．したがって

$$\left.\frac{d}{dx}f(x,y(x))\right|_{x=a} = 0$$

である．一方

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x,y(x)) &= f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x) \\ &= f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\left\{-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_x(x,y)}\right\}\end{aligned}$$

であるので

$$f_x(a,b) - f_y(a,b)\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)} = 0$$

である．

- $\lambda = \dfrac{f_y(a,b)}{f_x(a,b)}$ とすれば

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda\varphi_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \lambda\varphi_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

- また $\varphi(a, b) = 0$ は (a, b) が条件を $\varphi(x, y) = 0$ を満たす点であることから直ちに得られる．□

定理 7.3(Lagrange の未定乗数法)

$f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ は C^1 級とする．

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$$

とおく．$\varphi(x, y) = 0$ は特異点を持たないとする．このとき，条件 $\varphi(x, y) = 0$ のもとで $z = f(x, y)$ で極値をとる点において

$$F_x(x, y, \lambda) = 0,\ F_y(x, y, \lambda) = 0,\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

が成り立つ．

注

- λ を **Lagrange 乗数**という．
- Lagrange の未定乗数法はあくまで極値をとりうる点を絞り込んでいるだけで実際に極値をとるかどうかはこれだけでは判定できない．次節（補足）を参照．

例題２

$x^2 + y^2 = 1$ という条件のもとで $z = x + 2y + 3$ の極値をとりうる点を求めよ．

解

- $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $f(x, y) = x + 2y + 3$, $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$ とおく．
- $\varphi_x = 2x$, $\varphi_y = 2y$ より $\varphi(x, y) = 0$ 上には特異点はない．
- このとき

$$F_x = 1 - \lambda \cdot 2x, \quad F_y = 2 - \lambda \cdot 2y, \quad F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 1)$$

であるから極値をとりうる点では

$$\begin{cases} 1 - \lambda \cdot 2x \\ 2 - \lambda \cdot 2y \\ -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

を満たす．

- 第 1 式 $\times y-$ 第 2 式 $\times x$ より $y - 2x = 0$ を得る．これを第３式に代入することにより

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- したがって極値をとりうる点は

$$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad //$$

注 極値をとりうる点で実際に極値をとるかどうか調べることは難しいが計算でわかることもある. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のときを考える.

- この点では $\varphi_y=\frac{4}{\sqrt{5}}\neq 0$ より陰関数定理からこの点の周りで $\varphi(x,y)=0$ は x の関数 $y=y(x)$ で表される.
- $f(x,y(x))=x+2y(x)+3$ が $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ で極値をとるかどうかを調べればよい.
- 実際

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x,y(x))&=1+2y'(x)=1-2\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=1-2\frac{x}{y}\\ \frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))&=2y''(x)=-2\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}\\ &=-2\frac{2(2y)^2+2(2x)^2}{(2y)^3}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}\quad(\because\quad x^2+y^2=1)\end{aligned}$$

- ここで $\frac{d}{dx}f(x,y(x))\Big|_{x=1/\sqrt{5}}=0$ である（そういう点を選んできている）.
- 次に

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\Big|_{x=1/\sqrt{5}}=-\frac{8}{5\sqrt{5}}<0$$

したがって $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ で極大となる.

例 $x^3-3xy+y^3=0$ という条件のもとで $z=x^2+y^2$ の極値について（講義では触れないので興味がある者は読んでおく）

注 $x^3-3xy+y^3=0$ はデカルトの葉状曲線であった.

- $\varphi(x,y)=x^3-3xy+y^3$, $f(x,y)=x^2+y^2$, $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおく.
- このとき

$$\begin{aligned}F_x&=2x-\lambda(3x^2-3y)=2x-3\lambda(x^2-y),\\ F_y&=2y-\lambda(-3x+3y^2)=2y-3\lambda(y^2-x),\\ F_\lambda&=-\varphi=-(x^3-3xy+y^3)\end{aligned}$$

- 極値をとりうる点では

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda(x^2 - y) = 0 \\ 2y - 3\lambda(y^2 - x) = 0 \\ -(x^3 - 3xy + y^3) = 0 \end{cases}$$

- 第 1 式 $\times y-$ 第 2 式 $\times x$ より

$$\begin{aligned} 2x(y^2 - x) - 2y(x^2 - y) &= 0 \\ (x - y)(xy + x + y) &= 0 \end{aligned}$$

- $x = y$ のとき $\varphi = 0$ より

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

であるが $(0, 0)$ は $\varphi(x, y) = 0$ の特異点なので別途考える.

- $xy + x + y = 0$ のとき $\varphi = 0$ より

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ &x^3 + y^3 + 3(x + y) = 0 \\ &(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 3) = 0 \end{aligned}$$

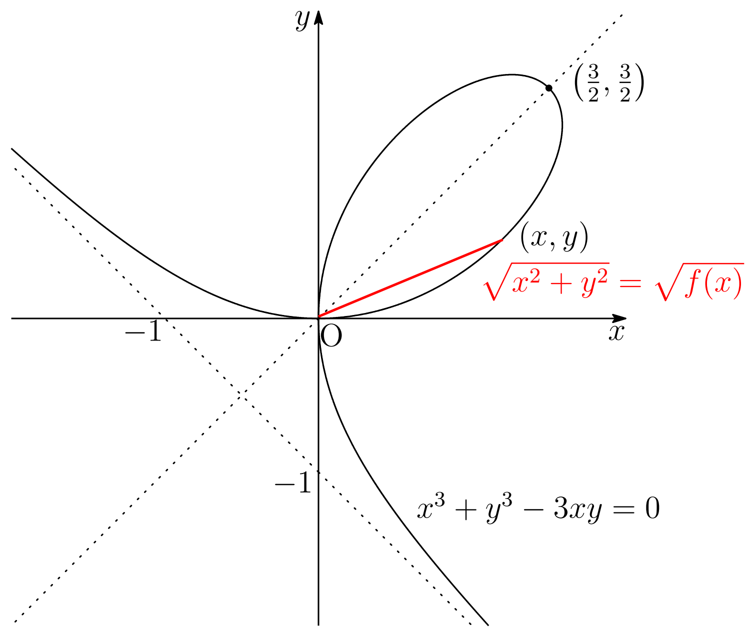
である. ここで

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0$$

であるから $x + y = 0$ しかない. これを $\varphi = 0$ に代入すると $x = y = 0$ が得られるがこれは特異点である.

- $x^2 + y^2$ は原点からの距離の平方であることから $(0, 0)$ では極小値（最小値）0 をとることがわかる.

- 曲線の概形から $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ では極大値 $\frac{9}{2}$ をとることがわかる.



- 実際この点では $\varphi_y = -3x + 3y^2 \neq 0$ であるから，$\varphi = 0$ はこの点の周りで $y = y(x)$ と x の関数で表され，

$$y'(x) = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

  が成り立つ．

- $f(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2$ であり

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 2x + 2y(x)y'(x)$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, y(x)) = 2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x)$$

  ここで

$$y''(x) = -\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2 - 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_{yy}}{\varphi_y^3}$$

  である．

$$\varphi_x = 3x^2 - 3y,\ \varphi_y = 3y^2 - 3x,\ \varphi_{xx} = 6x,\ \varphi_{xy} = -3,\ \ \varphi_{yy} = 6y$$

  より $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ では

$$\varphi_x = \frac{9}{4},\ \varphi_y = \frac{9}{4},\ \varphi_{xx} = 9,\ \varphi_{xy} = -3,\ \ \varphi_{yy} = 9$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
&y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},\\
&y'\left(\frac{3}{2}\right)=-1,\\
&y''\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9\dfrac{9^2}{4^2}+6\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{9}{4}+9\dfrac{9^2}{4^2}}{\dfrac{9^3}{4^3}}=-24\frac{4}{9}=-\frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x)))\Big|_{x=\frac{3}{2}}\\
=&2+2y'\left(\frac{3}{2}\right)^2+2y\left(\frac{3}{2}\right)y''\left(\frac{3}{2}\right)=2+2(-1)^2+2\frac{3}{2}\left(-\frac{32}{3}\right)=-28<0
\end{aligned}
$$

よって極大となる．//

7.4 補足

ここも興味のある者だけ読めばよい．条件付き極値問題における判定条件を得ることができる．

- $f(x,y),\ \varphi(x,y)$: C^2 級
- $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない
- $f(x,y)$ は条件「$\varphi(x,y)=0$」の下で点 (a,b) で極値をとるとする．
- このとき

  $$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

  とおくと，ある $\lambda_0\in\mathbb{R}$ があって

  $$F_x(a,b,\lambda_0)=0,\ F_y(a,b,\lambda_0)=0,\ F_\lambda(a,b,\lambda_0)=0$$

  が成り立つ（ラグランジュの未定乗数法）．
- $\varphi_y(a,b)\neq 0$ とすると (a,b) の近傍で $\varphi(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=y(x)$ が存在する．このとき

  $$y'(x)=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y},\quad y''(x)=-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}$$

  である（陰関数定理と陰関数の第２次導関数の公式（例題等））．

- $f(x,y(x))$ の $x=a$ における2回微分の値を調べる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f(x,y(x))\\
=&f_x(x,y(x))+f_y(x,y(x))y'(x)=f_x+f_y y'\\
&\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\\
=&(f_{xx}+f_{xy}y')+\{(f_{yx}+f_{yy}y')y'+f_{yy}y''\}\\
=&f_{xx}+2f_{xy}y'+f_{yy}(y')^2+f_{yy}y''\\
=&f_{xx}+2f_{xy}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+f_{yy}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+f_y\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}\right)\\
=&\frac{f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}+\frac{f_y}{\varphi_y}\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\right)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}=\lambda_0$ であるから $x=a$ （つまり $(x,y,\lambda)=(a,b,\lambda_0)$） では

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\right|_{x=a}\\
=&\frac{f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}+\lambda_0\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\right)\\
=&\frac{(f_{xx}-\lambda_0\varphi_{xx})\varphi_y^2-2(f_{xy}-\lambda_0\varphi_{xy})\varphi_x\varphi_y+(f_{yy}-\lambda_0\varphi_{yy})\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\\
=&\frac{F_{xx}\varphi_y^2-2F_{xy}\varphi_x\varphi_y+F_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}
\end{aligned}
$$

- これを行列式を用いて表すと

$$
\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\right|_{x=a}=-\frac{1}{\varphi_y^2}\begin{vmatrix}0&\varphi_x&\varphi_y\\ \varphi_x&F_{xx}&F_{xy}\\ \varphi_y&F_{xy}&F_{yy}\end{vmatrix}(a,b,\lambda_0)
$$

となる．この値が >0 であれば極小，<0 であれば極大である．

- $\varphi_x(a,b)\neq 0$ の場合 (a,b) の近傍で $\varphi(x,y)=0$ から定まる陰関数 $x=x(y)$ が存在する．このとき

$$
x'(y)=-\frac{\varphi_y}{\varphi_x},\quad x''(y)=-\frac{\varphi_{yy}\varphi_x^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{xx}\varphi_y^2}{\varphi_x^3}
$$

- 同様に $f(x(y),y)$ の $y=b$ における 2 回微分の値を調べる．これを行列式を用いて表すと

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x(y),y)\Big|_{y=b} = -\frac{1}{\varphi_x^2}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}(a,b,\lambda_0)$$

となる．この値が >0 であれば極小，<0 であれば極大である．