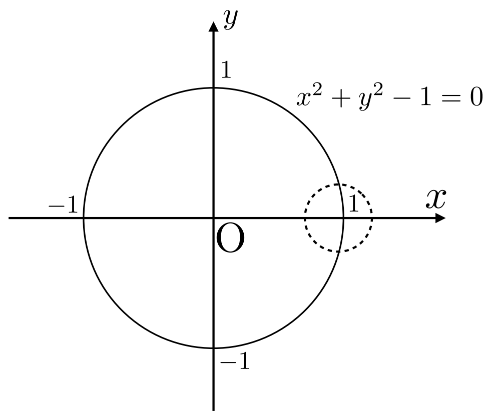
6　陰関数

6.1　陰関数とは

- $x^2+y^2-1=0$ を満たす点 (x,y) の集合は下図のように，原点中心，半径 1 の円をなす．



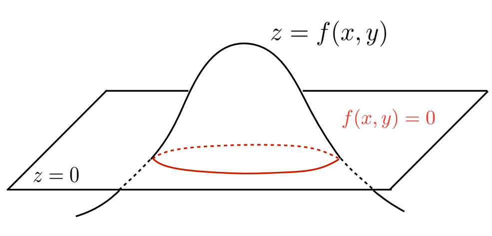
- 「$-1 \leq x \leq 1, y \geq 0$」に限ると 1 つの x に対し，$x^2+y^2-1=0$ を満たす y がただ 1 つ定まる．実際 $y=\sqrt{1-x^2}$ である．

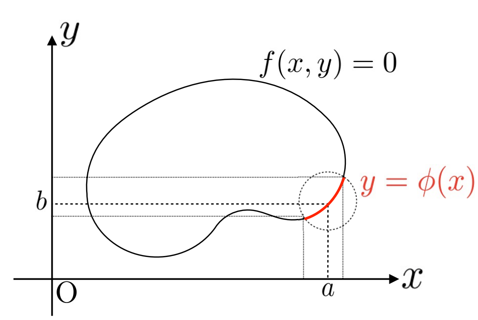
- しかし，点 $(1,0)$ の近傍ではそうなっていない，つまり $x=1$ を含むどれだけ小さい開区間をとっても，その中から x を選んでも，$x^2+y^2-1=0$ となる y が 1 つに定まらない．

- 一般に変数 x と y の間に

$$f(x,y)=0$$

で与えられる関係があるとき，x の変域と y の変域を適当に定めると，x に対して $f(x,y)=0$ を満たす y がただ 1 つ定まる場合がある．このように定まる関数を方程式 $f(x,y)=0$ によって定まる**陰関数**という．





6.2 陰関数定理

- $f(x,y)=0$ を満たす点 (a,b) の近傍で陰関数が存在するための条件を与えるのが次の**陰関数定理**である．

定理 6.1

$f(x,y)$ を点 (a,b) を含む開集合で定義された C^1 級関数とする．

- $f(a,b)=0$ ($\leftarrow$ 点 (a,b) が曲線 $f(x,y)=0$ 上にあるということ) かつ $f_y(a,b)\neq 0$ ならば $x=a$ を含む開区間 I で次の性質をもつ関数 $y=\phi(x)$ がただ 1 つ定まる

  (1) $b=\phi(a)$

  (2) $f(x,\phi(x))=0$ $(x\in I)$

  (3) $\dfrac{dy}{dx}=\phi'(x)=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\left(=-\dfrac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}\right)$

注

- 上の式は $f(x,\phi(x))=0$ の両辺を x で微分すれば合成関数の微分法より

$$f_x(x,\phi(x))+f_y(x,\phi(x))\phi'(x)=0$$

  から得られる．

- $f_y(a,b)=0$ であっても $f_x(a,b)\neq 0$ であれば上の陰関数定理において x と y の立場を入れかえることにより $y=b$ を含む開区間 J で定義された関数 $x=\psi(y)$ で次の性質をもつものがただ 1 つ存在する：

  $(1)'$ $a=\psi(b)$

  $(2)'$ $f(\psi(y),y)=0$ $(y\in J)$

  $(3)'$ $\dfrac{dx}{dy}=\psi'(x)=-\dfrac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}\left(=-\dfrac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)}\right)$

- 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点で $f_x=f_y=0$ となる点を**特異点**という．

- 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点が特異点でなければ，その点のまわりで曲線は $y=\phi(x)$ or $x=\psi(y)$ の形で表され，接線が 1 本だけ引ける．

- 実際，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ であれば陰関数定理より，曲線 $f(x,y)=0$ は点 (a,b) のまわりで (1), (2), (3) を満たす関数 $y=\phi(x)$ のグラフとして表される。この曲線の点 (a,b) における接線の傾きは

$$\phi'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$$

だから，この曲線の点 (a,b) における接線の方程式は

$$y-b=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)$$

$$\boldsymbol{f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0}$$

$f_y(a,b)=0$ でも $f_x(a,b)\neq 0$ であれば同じ式が得られる．

- 陰関数を具体的に表現することは一般的にできない．したがってその導関数も x だけの式で具体的に得ることは一般的にできない．しかし，x と y を用いて表すことはできることに注意する．

例題 1

$f(x,y)=4x^2+y^2-8x-4y+3$ とする．点 $(0,1)$ は方程式 $f(x,y)=0$ で表される曲線上の点であることを確かめ，この曲線の点 $(0,1)$ における接線の方程式を求めよ．

解

- $f(0,1)=1-4+3=0$ であるから点 $(0,1)$ は曲線 $f(x,y)=0$ 上の点である．
- $f_x(x,y)=8x-8,\ f_y(x,y)=2y-4$ である．特に $f_y(0,1)=-2\neq 0$ であるから，点 $(0,1)$ の近傍で $f(x,y)=0$ は陰関数 $y=\phi(x)$ を定める．
- $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\phi'(0)=-\dfrac{f_y(0,1)}{f_x(0,1)}=4$ であるので求める接線の方程式は

$$y-1=4(x-0)\quad \text{つまり}\quad \boldsymbol{y=4x+1}$$

例 $f(x,y)=x^3+y^3-3axy\ (a>0)$ のとき $f(x,y)=0$ であらわされる曲線について調べる（この曲線を**デカルトの葉状曲線**という）．

- まず特異点を調べよう．
    - $f_x(x,y)=3x^2-3ay,\ f_y(x,y)=3y^2-3ax$
    - $f_x(x,y)=0$ となるのは $x^2=ay$, $f_y(x,y)=0$ となるのは $y^2=ax$ である．したがって $f_x=f_y=0$ となるのは

    $$x^4=a^2y^2=a^3x,\quad x(x^3-a^3)=0,\quad x=0,a\qquad (x,y)=(0,0),\ (a,a)$$

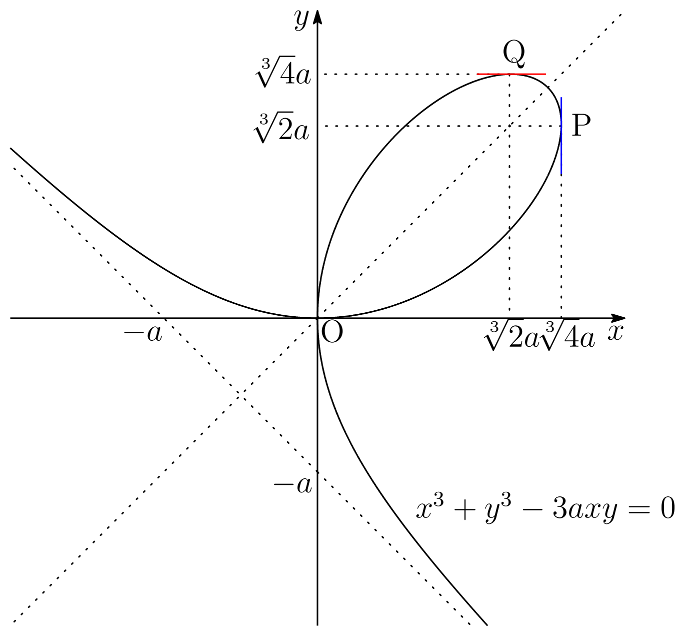
    であるが，曲線上の点は $(0,0)$ のみである．したがって特異点 $(0,0)$ をもつ．
- 次に特異点以外の点で $f_y(x,y)=0$ となる点は $y^2=ax$ つまり $x=a^{-1}y^2$ だから $f(x,y)=0$ に代入して

$$a^{-3}y^6+y^3-3y^3=0,\quad y^3(y^3-2a^3)=0,$$
$$y\neq 0\quad \text{より}\quad y=\sqrt[3]{2}a,\quad x=\sqrt[3]{4}a$$

したがって 点 $\mathrm{P}(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a)$ では $f_x\neq 0$ であり，$\dfrac{dx}{dy}=0$ である．

- 同様に特異点以外で $f_x(x,y)=0$ となる曲線上の点は $\mathrm{Q}(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a)$ で，$f_y \neq 0$ であり，$\dfrac{dy}{dx}=0$ である．
- これ以外の曲線上の点 (x,y) では

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{\boldsymbol{x^2-ay}}{\boldsymbol{y^2-ax}},\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}=-\frac{\boldsymbol{y^2-ax}}{\boldsymbol{x^2-ay}}$$



例題２

$f(x,y)$ を (a,b) の近傍で定義された C^2 級関数で，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ とする．このとき (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\phi(x)$ は２階微分可能であり $\phi''(x)$ は

$$\phi''(x)=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

で与えられることを示せ．ただし，右辺について (x,y) に $(x,\phi(x))$ が代入されているとする．

解 陰関数定理より $x=a$ を含む開集合 I で定義された関数 $y=\phi(x)$ で

- $b=\phi(a)$
- $f(x,\phi(x))=0 \ (x\in I)$
- $\phi\in C^1(I)$ で

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))} \tag{6.1}$$

(6.1) の両辺を x で微分すると

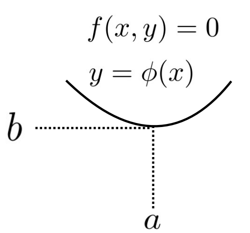
$$\begin{aligned}
\phi''(x) &= -\frac{\left[\frac{d}{dx}f_x\right]f_y - f_x\left[\frac{d}{dx}f_y\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \tfrac{d}{dx}f_x(x,\phi(x)) = f_{xx}(x,\phi(x)) + f_{xy}(x,\phi(x))\phi'(x) \ (\text{合成関数の微分}) \\
&= -\frac{[f_{xx}+f_{xy}\phi']f_y - f_x[f_{yx}+f_{yy}\phi']}{f_y^2} \quad \leftarrow \phi' = -\tfrac{f_x}{f_y} \\
&= -\frac{\left[f_{xx}+f_{xy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right]f_y - f_x\left[f_{yx}+f_{yy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \text{分母分子に } f_y \text{ をかける} \\
&= -\frac{f_{xx}f_y^2 - f_{xy}f_xf_y - f_{yx}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \quad \leftarrow f_{xy} = f_{yx} \\
&= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}
\end{aligned}$$

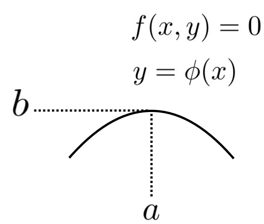
注 $f_y(a,b) \neq 0$ のとき $\phi'(a) = 0 \Leftrightarrow f_x(a,b) = 0$ だから，このとき

$$\phi''(a) = -\frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}$$

よって

- $\phi''(a) = -\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0 \Rightarrow$ 極小
- $\phi''(a) = -\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} < 0 \Rightarrow$ 極大





- $f(x,y,z) = 0$ は一般に空間内の曲面を表す．

  例

  - $x^2+y^2+z^2-1=0$　(原点中心，半径 1 の球 (面))
  - $ax+by+cz+d=0$ $((a,b,c) \neq (0,0,0))$
    ($\vec{n} = (a,b,c)$ を法線ベクトルとする平面)

- 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) の「まわり」で曲面が 2 変数関数 $z=\phi(x,y)$ のグラフとして表されるための十分条件が次の version の陰関数定理である．

定理 6.2

- $f(x,y,z)$ は点 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で定義された C^1 級の関数とする.
- $f(a,b,c)=0,\ f_z(a,b,c) \neq 0$ ならば $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を含む $\mathbb{R}^2$ のある開集合で定義された次の性質をもつ関数 $z=\phi(x,y)$ がただ 1 つ定まる：

  (1) $c=\phi(a,b)$

  (2) $f(x,y,\phi(x,y))=0\ ((x,y) \in U)$

  (3) $z=\phi(x,y)$ は C^1 級で

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\phi_x(x,y)=-\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\left(=-\frac{f_x(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\phi_y(x,y)=-\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\left(=-\frac{f_y(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}\right)$$

- $f(x,y,z)$ は点 (a,b,c) を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で C^1 級とする.
- 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は $f_x(a,b,c)$, $f_y(a,b,c)$, $f_z(a,b,c)$ のいずれかが 0 でなければ，次で与えられる：

$$\boldsymbol{f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0}$$

定理 6.3

- $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ を $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で定義された C^1 級の関数とする.
- $f(a,b,c)=0$ かつ $g(a,b,c)=0$ かつ

$$J=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0 \quad (\text{at} \quad (a,b,c))$$

が成り立つならば，$x=a$ を含むある開区間 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された次の性質をもつ関数 $y=\phi_1(x)$, $y=\phi_2(x)$ がただ一組定まる：

(1) $b=\phi_1(a)$, $c=\phi_2(a)$

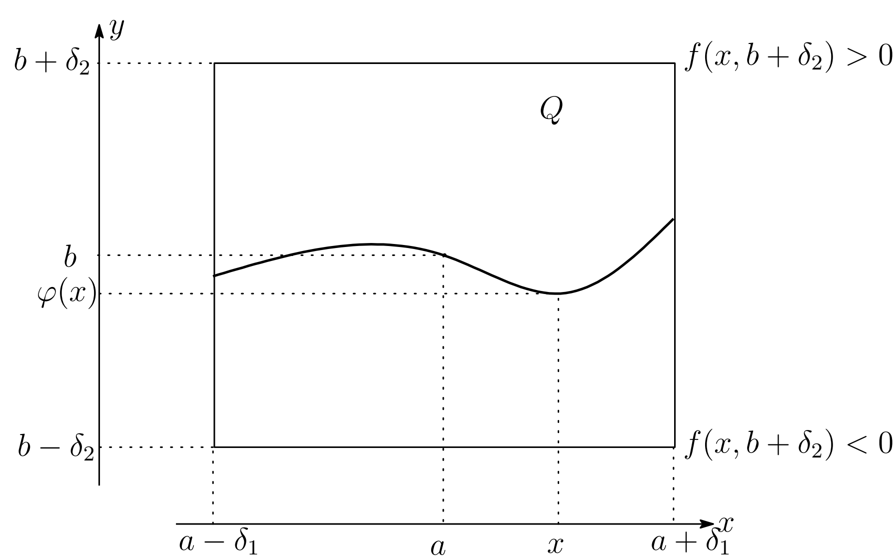
(2) $f(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0$, $g(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0 \quad (x\in J)$

(3) ϕ_1, ϕ_2 は I で C^1 級で

$$\phi_1'=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z\\ g_x & g_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z\\ g_y & g_z\end{vmatrix}},\quad \phi_2'=-\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x\\ g_y & g_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z\\ g_y & g_z\end{vmatrix}}$$

6.3 補足: 定理 6.1 の証明

Step 1: $\varphi(x)$ の存在



- $f_y(a,b) > 0$ の場合を考える．f_y は連続であるから，ある $\delta_1, \delta_2 > 0$ があって

$$f_y(x,y) > 0 \ \text{ on } \{(x,y) \mid |x-a| \le \delta_1, |y-b| \le \delta_2\} =: Q$$

  が成り立つ．

- $f_y(a,y) > 0$ $(y \in [b-\delta_2, b+\delta_2])$ であるから $f(a,y)$ は $[b-\delta_2, b+\delta]$ で単調増加であり，$y=b$ のとき $f(a,y) = f(a,b) = 0$ であるか $f(a, b-\delta_2) < 0 < f(a, b+\delta_2)$ である．

- さらに f は連続であるから，$\delta_1 > 0$ を十分小さくとると

$$|x-a| \le \delta_1 \ \Rightarrow \ f(x, b-\delta_1) < 0 < f(x, b+\delta_2)$$

  が成り立つ．

- 中間値の定理から，各 $x \in [a-\delta_1, a+\delta_1]$ に対して，ある $f(x,y) = 0$ となる $y \in [b-\delta_2, b+\delta_2]$ が存在する．$g_y(x,y) > 0$ であるからこのような y はただ 1 つである。もし 2 つあったら $f(x,y_1) = f(x,y_2) = 0$ となるが，Rolle の定理により $f_y(x,d) = 0$ となる d が y_1 と y_2 の間にあることになる．

- $y = \varphi(x)$ とすることにより φ は $[a-\delta_1, a+\delta_1]$ を定義域とした $[b-\delta_2, b+\delta_2]$ に値をとる関数となる．

- 特に $\varphi(a) = b$ である．

Step 2: $\varphi(x)$ の連続性

- φ が $x_0 \in [a-\delta_1, a+\delta_1]$ で連続であることを示す．

- 連続でないとすると，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，どんなに $\delta > 0$ をとっても

$$|x-x_0| < \delta, x \in [a-\delta_1, a+\delta_1] \text{ であるにもかかわらず } |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \ge \varepsilon_0$$

  となる x が存在することになる．$\delta = 1/n$ とすることにより，各 n に対して次のような x_n がとれる：

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \ x_n \in [a-\delta_1, a+\delta_1], \ |\varphi(x_n) - \varphi(a)| \ge \varepsilon_0.$$

- $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ であることに注意．

- φ の値域から $\varphi(x_n) \in [b-\delta_2, b+\delta_2]$ であるから $\varphi(x_n)$ は有界な数列である．

- Bolzano-Weierstrass の定理より，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して $\varphi(x_{n_k}) \to y_0 \in [b-\delta_2, b+\delta_2]$ $(k \to \infty)$ が成り立つ．

- $f(x_{n_k}, \varphi(x_{n_k})) = 0$ であり，f は連続であるから $k \to \infty$ とすると $f(x_0, y_0) = 0$ となる．このことから $y_0 = \varphi(x_0)$ とならなければならない．

- 一方 $|\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon_0$ で $k \to \infty$ とすると $|y_0 - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon_0$ となる．これは矛盾である．

- したがって φ は x_0 で連続である．

Step 3: $\varphi(x)$ の微分可能性

- φ が $x_0 \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ で微分可能であることを示す．

- $\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + k$ とおくと φ は連続であるから $h \to 0$ のとき $k \to 0$ が成り立つ．

- h を十分小さくとると，$(x_0, \varphi(x_0))$ と $(x_0 + h, \varphi(x_0) + k)$ を結ぶ線分は Q に含まれるので Taylor の定理より

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \\
&= f(x_0 + h, \varphi(x_0) + k) \\
&= f(x_0, \varphi(x_0)) + f_x(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)h + f_y(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)k \\
&= f_x(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)h + f_y(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)k
\end{aligned}$$

  となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する．

- 上の式を変形すると

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{f_x(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)}{f_y(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)}$$

- f_x, f_y は連続であるから $h \to 0$ とすることにより

$$-\frac{f_x(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)}{f_y(x_0 + \theta h, \varphi(x_0) + \theta k)} \to -\frac{f_x(x_0), \varphi(x_0))}{f_y(x_0, \varphi(x_0))}$$

  が成り立つ．

- したがって φ は x_0 で微分可能で

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, \varphi(x_0))}{f_y(x_0, \varphi(x_0))}$$

  が成り立つ．

- さらに

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

  において，右辺は x の連続関数であるから φ は C^1 級である．

$\square$