

5 Taylor の定理

5.1 平均値の定理 (1 変数関数) (復習)

- 1 変数関数 $f(x)$ は a を含む開区間 I で微分可能であるとする. このとき $a+h \in I$ なる任意の h に対して

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

なる θ が存在する. この式は変形すると

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a+\theta h)h, \\ f(x) &= f(a) + f'(c)(x-a) \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間}) \end{aligned}$$

5.2 Talyor の定理 (1 変数関数) (復習)

- 関数 $f(x)$ は a を含む開区間 I で n 回微分可能であるとする. このとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

となる c が a と x の間に存在する. $\theta = \frac{c-a}{x-a}$ とおくと $c = a + \theta(x-a)$ であるから Taylor の定理は以下のようになる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{(n)!} (x-a)^n$$

$x = a + h$ とおけば

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} h^n$$

- 上式の

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n, \quad \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

を**剰余項**といい R_n と表す.

- f が何回でも微分可能で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

が成り立つ. 右辺を f の $x = a$ における **Taylor 級数** といい f を $x = a$ における Taylor 級数で表すことを f を $x = a$ における **Taylor 級数** という.

5.3 C^n 級, C^∞ 級

- 関数 $f(x, y)$ はある開集合 U で定義されているとする. U において第 n 次までの偏導関数が存在してそれらが全て連続であるとき f は U で C^n 級であるといひ $f \in C^n(U)$ と表す. また

$$C^\infty(U) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(U)$$

である. ただし, $C^0(U)$ は U で連続な関数の集合である.

5.4 記号の準備

- 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍で C^1 級とする. このとき

$$z = f(a + ht, b + kt)$$

に対して合成関数の微分法から

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt)k \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\leftarrow x = a + ht, y = b + kt \text{ が代入されている}) \end{aligned}$$

- f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ と定数 h, k を用いてつくる $h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$ を

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

と表すことにする. また

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \quad (n \geq 2)$$

が定義されたとして

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \right\}$$

と定義する.

- 例えば f が C^2 級ならば

$$\begin{aligned}
\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= h\frac{\partial}{\partial x} \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + k\frac{\partial}{\partial y} \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

- 一般に $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{r=0}^n {}_nC_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n f}{\partial^{n-r} x \partial^r y}$$

が成り立つ.

- 以下 $\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right]_{(x,y)=(a,b)}$ を $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b)$ と略記する.
- これを用いると $z = f(x, y)$ が (a, b) の近傍 U で C^n 級で $x = a + ht$, $y = bt$ のとき, 合成関数 $z = f(a + ht, b + kt)$ は t の関数として $t = 0$ の近傍で (実際は $(a + ht, b + kt) \in U$ となる t のある開区間で) C^n 級となる.
- このとき

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt)k \\
&= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a + ht, b + kt) \\
\frac{d^2 z}{dt^2} &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a + ht, b + kt) \\
\frac{d^n z}{dt^n} &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a + ht, b + kt)
\end{aligned}$$

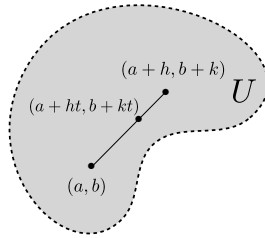
が成り立つ.

定理 5.1 (Taylor の定理)

関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) を含む開集合 U で定義された関数で C^n 級とする. このとき (a, b) と $(a + h, b + k)$ を結ぶ線分が U に含まれるならば次の等式を満足する θ が存在する:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b) + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$



証明

- 仮定より t の関数

$$z = f(a + ht, b + kt) =: \phi(t)$$

が $t \in [0, 1]$ に対して定義される. ϕ は $(0, 1)$ で C^n 級である.

- 合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt)k \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + ht, b + kt) \\ \phi^{(m)}(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a + ht, b + kt), \quad m = 2, \dots, n \end{aligned}$$

- 1 変数関数における Taylor の定理 ($a = 0$) より

$$\phi(t) = \phi(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{t^r}{r!} \phi^{(r)}(0) + \frac{t^n}{n!} \phi^{(n)}(\theta t) \quad (0 < \theta < 1)$$

なる θ が存在する.

- $t = 1$ とすることにより

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b) + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)$$

ここで

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)$$

とおけばよい. $\square$

注 R_n を **Lagrange の剰余項** という.

- 定理 5.1 において $(a, b) = (0, 0)$ とすると次の系を得る :

系 5.2 (Maclaurin の定理)

関数 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ を含む開集合 U で定義された関数で C^n 級とする. このとき $(0, 0)$ と (h, k) を結ぶ線分が U に含まれるならば次の等式を満足する θ が存在する :

$$f(h, k) = f(0, 0) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(0, 0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\theta h, \theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

- Taylor の定理・Maclaurin の定理において, h, k に関する r 次の項

$$\frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b)$$

は次のようになる :

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (a, b) h^{r-j} k^j$$

$a + h = x, b + k = y$ とすれば

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (a, b) (x - a)^{r-j} (y - b)^j$$

$a = 0, b = 0$ のとき

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (0, 0) x^{r-j} y^j$$

- $r = 1$ のときは $f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

- $r = 2$ のとき

$$\frac{1}{2!} \{f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2\}$$

- $r = 3$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3!} \{f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b) \\ & + 3f_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3\} \end{aligned}$$

例題 1

関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y - 3$ について点 $(1, 1)$ における Taylor の定理の等式をつくれ (f の第 3 次以上の偏導関数は 0 であることに注意すると $R_3 = 0$ となる)。

解

- $f_x(x, y) = 2x - 2y, f_y(x, y) = -2x - 6y + 8$ より

$$f_x(1, 1) = 0, f_y(1, 1) = 0$$

- $f_{xx}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = -2, f_{yy}(x, y) = -6$ より

$$f_{xx}(1, 1) = 2, f_{xy}(1, 1) = -2, f_{yy}(1, 1) = -6$$

- 第 3 次以上の偏導関数は 0 だから Taylor の定理の等式は

$$\begin{aligned} & f(x, y) \\ &= f(1, 1) + \{f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)\} \\ & \quad + \frac{1}{2!} \{f_{xx}(x - 1)^2 + 2f_{xy}(x - 1)(y - 1) + f_{yy}(y - 1)^2\} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \{2(x - 1)^2 - 4(x - 1)(y - 1) - 6(y - 1)^2\} \\ &= 1 + (x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2 \end{aligned}$$

例題 2

関数 $f(x, y) = e^y \log(1 + x)$ について Maclaurin の定理の 3 次の項まで求めよ。

解

- $\frac{\partial^r}{\partial x^{r-k} \partial y^k} = e^y \frac{\partial^{r-k}}{\partial x^{r-k}} \log(1+x)$ より
- $f_x(x, y) = \frac{e^y}{1+x}, f_y(x, y) = e^y \log(1+x)$
- $f_{xx}(x, y) = -\frac{e^y}{(1+x)^2}, f_{xy}(x, y) = \frac{e^y}{1+x}, f_{yy}(x, y) = e^y \log(1+x)$
- $f_{xxx}(x, y) = \frac{2e^y}{(1+x)^3}, f_{xxy}(x, y) = -\frac{e^y}{(1+x)^2},$
 $f_{xyy}(x, y) = e^y \log(1+x), f_{yyy}(x, y) = e^y \log(1+x)$
- よって

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \\ f_x(0, 0) &= 1, f_y(0, 0) = 0, \\ f_{xx}(0, 0) &= -1, f_{xy}(0, 0) = 1, f_{yy}(0, 0) = 0, \\ f_{xxx}(0, 0) &= 2, f_{xxy}(0, 0) = -1, f_{xyy}(0, 0) = 1, f_{yyy}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & f(0, 0) + \{f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y\} \\ & + \frac{1}{2!} \{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\} \\ & + \frac{1}{3!} \{f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3\} \\ & = 0 + (1x + 0y) + \frac{1}{2!}(-x^2 + 2xy + 0y^2) + \frac{1}{3!}\{2x^3 + 3(-1)x^3y + 3 \cdot 1xy^2 + 0y^3\} \\ & = x - \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 \end{aligned}$$

例題3

関数 $f(x, y) = e^{x-y}$ について Maclaurin の定理の等式をつくれ.

解

- $\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k}(x, y) = \frac{\partial^{r-k}}{\partial x^{r-k}} e^x \frac{\partial^k}{\partial y^k} e^{-y} = (-1)^k e^x e^{-y} = (-1)^k e^{x-y}$ より

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k}(0, 0) = (-1)^k, \quad \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k}(\theta x, \theta y) = (-1)^k e^{\theta(x-y)}$$

である.

- Maclaurin の定理の r 次の項は

$$\frac{1}{r!} \sum_{k=0}^r {}_rC_k \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k}(0,0) x^{r-k} y^k = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^r {}_rC_k x^{r-k} (-y)^k = \frac{1}{r!} (x-y)^r$$

したがって

$$1 + (x-y) + \frac{1}{2!} (x-y)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} (x-y)^{n-1} \\ + \frac{1}{n!} e^{\theta(x-y)} (x-y)^n$$