

3 全微分

3.1 1 変数関数の微分可能性 (復習)

- 开区間で定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することであった.

- 言い換えると, ある実数 A が存在して

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right\} = 0$$

が成り立つことであり, このときの A を $f'(a)$ と表すのであった.

- これをさらに書き換えると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} = 0$$

であるので f が $x = a$ で微分可能であるとは, ある実数 A があって

$$g(x) = f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

とおくと

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} = 0$$

が成り立つことであると言える.

- このとき $A = f'(a)$ と表し, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ の表す直線は曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における**接線**というのであった.

3.2 全微分可能性

- 曲面 $z = f(x, y)$ に対し, 点 $(a, b, f(a, b))$ を通る平面の方程式は実数 α, β を用いて

$$z = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)$$

と表される.

定義

関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) の近傍で定義されているとする. $f(x, y)$ が点 (a, b) で**全微分可能**であるとは, ある実数 α, β が存在して

$$g(x, y) = f(x, y) - \{f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)\} \quad (3.1)$$

とおくと

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \quad (3.2)$$

が成り立つことである.

注 (3.2) より $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = 0$ も成り立つ.

定理 3.1

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で**全微分可能**であるならば

- $f(x, y)$ は点 (a, b) で連続である.
- $f(x, y)$ は点 (a, b) で x, y について偏微分可能で

$$\alpha = f_x(a, b), \quad \beta = f_y(a, b)$$

が成り立つ.

証明 仮定より, ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$g(x, y) = f(x, y) - \{f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)\}$$

とおくと

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \quad (3.3)$$

が成り立つ.

まず $f(x, y)$ が点 (a, b) で連続であること, つまり $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$ を示す.

- $f(x, y) - f(a, b) = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + g(x, y)$ を変形して

$$f(x, y) - f(a, b) \quad (3.4)$$

$$= \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad (3.5)$$

である. これと (3.3) より

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x,y) - f(a,b)\} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

次に点 (a,b) で x について偏微分可能で $\alpha = f_x(a,b)$ であること, つまり

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \alpha$$

を示す.

- (3.4) で $x = a+h, y = b$ とおくと

$$f(a+h,b) - f(a,b) = \alpha h + g(a+h,b)$$

(3.2) において直線 $y = b$ に沿って (x,y) を (a,b) に近づけることを考えることに
より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h,b)}{|h|} = 0 \quad \text{つまり} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{g(a+h,b)}{h} \right| = 0$$

を得る.

- したがって

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \alpha + \frac{g(a+h,b)}{h} \right\} = \alpha$$

であるので $f(x,y)$ は (a,b) で x について偏微分可能で $\alpha = f_x(a,b)$ である.

- $\beta = f_y(a,b)$ も同様である. $\square$

3.3 全微分・接平面

- $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとき, 平面

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

を曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**という.

- 接平面の方程式を変形すると

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

であるが、ここで

$$dz = z - f(a, b), \quad dx = x - a, \quad dy = y - b$$

とおくと

$$dz = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$$

となる。この式を $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における**全微分**という。

- $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるならば $f(x, y)$ は点 (a, b) で x, y について偏微分可能であることはすでにみたが、逆は正しくない。

定理 3.2

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) のある近傍で x, y について偏微分可能で、偏導関数 f_x, f_y のいずれかが点 (a, b) で連続ならば $f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能である。

証明

- f_x が連続であると仮定して定理を証明する。
- $h = x - a, k = y - b, g(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k$ とおいて

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

を証明すればよい。

- 十分小さい $|h|, |k|$ に対して平均値の定理より

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a + \theta h, b + k)$$

となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する。 $\varepsilon_1 = f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a, b)$ とおくと

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a + \theta h, b + k)$$

- $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき $(a + \theta h, b + k) \rightarrow (a, b)$ であり、 f_x は (a, b) で連続であるから

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

- 次に $f(x, y)$ は点 (a, b) で y について偏微分可能であるから

$$\varepsilon_2 = \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} - f_y(a, b)$$

とおくと $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ (as $k \rightarrow 0$) が成り立つ。これより

$$f(a, b+k) - f(a, b) = f_y(a, b)k + \varepsilon_2 k$$

である。

- したがって

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b) \\ &= h\{f_x(a, b) + \varepsilon_1\} + k\{f_y(a, b) + \varepsilon_2\} \\ &= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 \end{aligned}$$

したがって $g(h, k) = h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2$ である。

- ここで

$$\frac{|h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \rightarrow 0 \quad \text{as } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

したがって $f(x, y)$ は (a, b) で全微分可能である。□

例題 1

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ は $(0, 0)$ で x, y について偏微分可能であるが全微分可能ではないことを確かめよ。

解

- 偏微分可能であること：

任意の h に対して $f(0+h, 0) = 0$ であるから、 $h \neq 0$ に対して

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

つまり $f_x(0, 0) = 0$ である。同様に $f_y(0, 0) = 0$ である。

- 全微分可能でないこと：

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) - \{f(0, 0) + f_x(0, 0)(x-0) + f_y(0, 0)(y-0)\} \\ &= f(x, y) = \sqrt{|xy|} \end{aligned}$$

に対して

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

は存在しない。したがって全微分可能ではない。

注 $f(x, y) = |xy|$ は $(0, 0)$ で全微分可能である.

例題 2

曲面 $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ 上の点 P $(1, \sqrt{3}, 2)$ における接平面の方程式を求めよ.

解

• $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$ であるので $x = 1, y = \sqrt{3}$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である.

- よって求める接平面の方程式は

$$z - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \sqrt{3}),$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z = 8$$

//

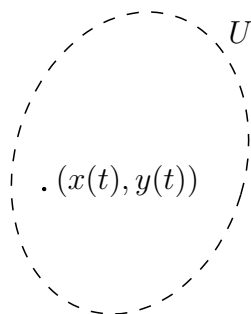
4 合成関数の微分法

4.1 合成関数

- 「 (x, y) 」を決めると $z \in \mathbb{R}$ がただ1つ定まるとき z は (x, y) の関数であるといひ $z = f(x, y)$ と表すのであった.
- x, y がそれぞれ t の関数であるとする: $x = x(t), y = y(t)$
このとき t を1つ決めると $x = x(t) \in \mathbb{R}, y = y(t) \in \mathbb{R}$ がそれぞれただ1つ定まる, つまり $\mathbb{R}^2$ の点 $(x(t), y(t))$ が1つ定まることになる.
- したがって t を1つ決めると, 点 $(x(t), y(t))$ が1つ決まり, $z = f(x(t), y(t))$ が1つ定まることになる. このとき z は t の関数となるが, これを**合成関数**というのである. 正確に述べよう.
- 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍 U で定義されているとする.
- 関数 $x = x(t), y = y(t)$ はある (開) 区間 I で定義されているとする.
- 点 $(x(t), y(t))$ がすべての $t \in I$ に対し $(x(t), y(t)) \in U$ であれば**合成関数**

$$z = f(x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

が定義される.



4.2 合成関数の微分

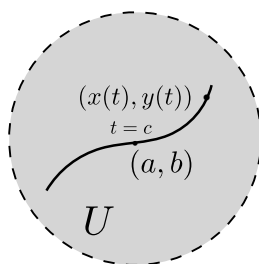
- 先の合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ の微分係数・導関数を求める公式を導く.
- t が変化すると x, y も同時に変化するため, $x(t), y(t)$ の微分可能性に加え, $f(x, y)$ の全微分可能性が必要である.

定理 4.1

- 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能
- 関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は c を含むある开区間 I で定義されており $t = c$ で微分可能
- $a = x(c)$, $b = y(c)$

ならば合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ は $t = c$ で微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=c} &= \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \frac{dy}{dt}(c) \\ [z'(c) &= f_x(a, b)x'(c) + f_y(a, b)y'(c)]\end{aligned}$$



証明

- $\varphi(t) = \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(c), y(c))}{t - c} = \frac{f(x(t), y(t)) - f(a, b)}{t - c}$ とおく. $f(x(t), y(t))$ の $t = c$ での微分係数を求めるためには $\lim_{t \rightarrow c} \varphi(t)$ を計算すればよい.
- $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるから

$$f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + g(x, y), \quad (4.1)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \quad (4.2)$$

を満たす.

- (4.1) より

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{f(x(t), y(t)) - f(a, b)}{t - c} \\ &= \frac{f_x(a, b)(x(t) - c) + f_y(a, b)(y(t) - c) + g(x(t), y(t))}{t - c}\end{aligned}$$

である.

- $t \rightarrow c$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow c} \frac{x(t) - a}{t - c} &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{x(t) - x(c)}{t - c} \rightarrow x'(c), \\ \lim_{t \rightarrow c} \frac{y(t) - b}{t - c} &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{y(t) - y(c)}{t - c} \rightarrow y'(c)\end{aligned}$$

- さらに $t \rightarrow c$ のとき $(x(t), y(t)) \rightarrow (a, b)$ であるから (4.2) より

$$\begin{aligned}\left| \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} \right| &= \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \frac{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}{t - c} \\ &= \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \sqrt{\left(\frac{x - a}{t - c}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{t - c}\right)^2} \\ &\rightarrow 0 \quad (\text{as } t \rightarrow c)\end{aligned}$$

- したがって

$$\frac{dz}{dt} \Big|_{t=c} = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \frac{dy}{dt}(c)$$

□

- 導関数についても同様である.
- $z = f(x, y)$ が U の各点で全微分可能, $x = x(t)$, $y = y(t)$ がすべての $t \in I$ で微分可能であるとき, $z = f(x(t), y(t))$ はすべての $t \in I$ で微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)\end{aligned}$$

- $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ がともに 2 変数関数であるとき, $z = f(x, y)$ との合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ を u または v について偏微分することは $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ について一方の変数を定数として扱うので, 本質的には 1 変数関数の微分と同じである. したがって定理 4.1 より次を得る:

定理 4.2

- $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能
- $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ は点 (c, d) で全 (偏) 微分可能
- $a = \varphi(c, d), b = \psi(c, d)$

であるならば $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は点 (c, d) で全 (偏) 微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \frac{\partial x}{\partial u}(c, d) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \frac{\partial y}{\partial u}(c, d)$$

$$[z_u(c, d) = f_x(a, b)x_u(c, d) + f_y(a, b)y_u(c, d)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \frac{\partial x}{\partial v}(c, d) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \frac{\partial y}{\partial v}(c, d)$$

$$[z_v(c, d) = f_x(a, b)x_v(c, d) + f_y(a, b)y_v(c, d)]$$

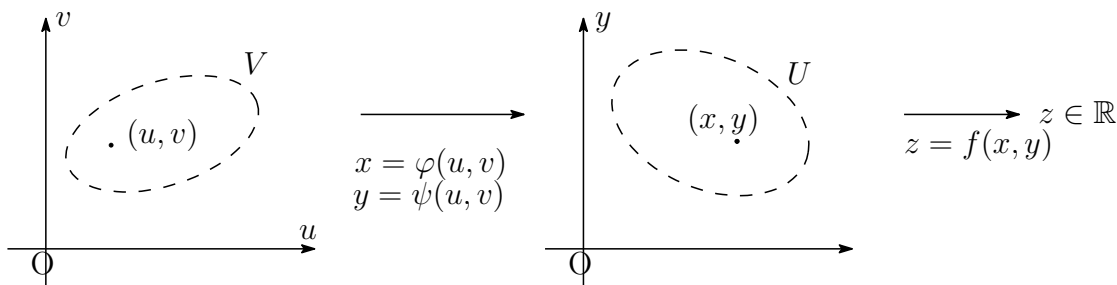
偏導関数の場合

- $z = f(x, y)$ は U の各点で全微分可能
- $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ は uv 平面の領域 V の各点で全微分可能
- $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$ ($\forall (u, v) \in V$)

とすると、 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は V の各点 (u, v) で全微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$



例題 1

$z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$ のとき $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

解

$$z_x = e^{x-2y}(x-2y)_x = e^{x-2y}, \quad z_y = e^{x-2y}(x-2y)_y = -2e^{x-2y}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t - 2e^{x-2y} 3t^2 \\ &= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) \quad // \end{aligned}$$

注 必要に応じて最後の $e^{x-2y} = e^{\sin t - t^3}$ と t の式に戻す.

例題 2

$z = x^2 \log y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - v$ のとき $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \log y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{x^2}{y}, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 3, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1, \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= (2x \log y) \frac{1}{v} + \left(\frac{x^2}{y} \right) \cdot 3 \\ &= \frac{2x \log y}{v} + \frac{3x^2}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (2x \log y) \left(-\frac{u}{v^2} \right) + \left(\frac{x^2}{y} \right) \cdot (-1) \\ &= -\frac{(2x \log y)u}{v^2} - \frac{x^2}{y} \quad // \end{aligned}$$

注 x, y には $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - v$ が代入されていると考える.

例題 3

$z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の時 $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を求めよ. ただし, $f(x, y)$ は第2次偏導関数まで連続とする.

解 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta)$$

ここで $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ はそれぞれ $f_x(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$ であり, それぞれ何かある x, y の2変数関数の x, y に $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ が代入されていることに注意.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \sin \theta \quad \leftarrow \cos \theta, \sin \theta \text{ は定数扱い} \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \sin \theta \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \sin \theta \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta \right) \sin \theta \quad \leftarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

次に $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を計算する.

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta) & \leftarrow \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ にも } \theta \text{ があるので積の微分} \\ f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) & f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) (r \cos \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial x} (-r \cos \theta) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} (-r \sin \theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (r \cos \theta) \right) (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial x} (-r \cos \theta) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (r \cos \theta) \right) + \frac{\partial z}{\partial y} (-r \sin \theta) \quad \leftarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &= r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2 \theta - r \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta - r \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \quad // \end{aligned}$$