

解析III講義ノート

松澤 寛

- 今まで扱っていた関数は $f(x)$ あるいは $y = f(x)$ などとかかれており、**1 変数関数**とよばれている.
- 1 変数関数の定義域は $\mathbb{R}$ (実数全体) やその部分集合, 特に**区間**であった

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{閉区間}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{开区間}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \text{etc...}$$

- 本講義では N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{R}^N = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}$$

の部分集合を定義する関数である**多変数関数**, 特に $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

の部分集合を定義域とする関数である**2 変数関数**を扱う.

1 2 変数関数の極限

1.1 2 変数関数

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ とし, $M \subset \mathbb{R}^2$ とする.
- 各 $(x, y) \in M$ に対して, ただ 1 つの $z \in \mathbb{R}$ が定まるとき z は M で定義された**2 変数関数**であるといい, $z = \underline{f(x, y)}$ と表す. このとき M を関数 $f(x, y)$ の**定義域**という.
- $f(x, y)$ が x, y の具体的な式で与えられているとき, 特に断りがない場合, その式が意味をもつ範囲を定義域とする.

例 1.1

(1) $z = x + y + 1$, 定義域は xy 平面全体 (あるいは $\mathbb{R}^2$)

(2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- 定義域は 「 $\sqrt{\quad}$ の中」 ≥ 0 より
- $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ つまり $x^2 + y^2 \leq 1$
- したがって $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(3) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- 定義域は 「分母 $\neq 0$ 」 で, $x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$ である.

- したがって xy 平面から原点を除いた部分, つまり $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ である.

$$(4) \quad z = \frac{x - y}{x + y}$$

- 定義域は「分母 $\neq 0$ 」より $x + y \neq 0$
- xy 平面から直線 $x + y = 0$ を除いた部分

グラフ

- 1 変数関数 $y = f(x)$ ($x \in I$) に対し

$$\{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

をこの関数のグラフといったのであった. 1 変数関数のグラフは一般的に $\mathbb{R}^2$ 内の曲線である.

- 2 変数関数 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in M$) に対し

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in M\} \subset \mathbb{R}^3$$

をこの関数のグラフという. 2 変数関数のグラフは一般的に $\mathbb{R}^3$ 内の曲面である.

- 例 1.1(1) の $z = x + y + 1$ のグラフは空間内の平面である.
- 例 1.1(2) の $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) のグラフは

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

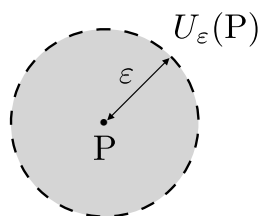
より原点中心, 半径 1 の球面の上半分である.

1.2 2 変数関数の極限

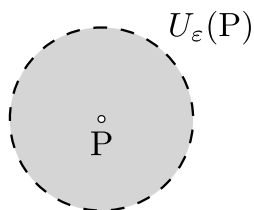
- 点 $P(a, b)$ と $\varepsilon > 0$ に対し $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$U_\varepsilon(P) = \{(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \varepsilon\}$$

を点 P の ε -近傍という (中心 P , 半径 ε の円の内部). ε -近傍を単に近傍ということもある.



- 関数 $z = f(x, y)$ は点 $P(a, b)$ のある近傍 $U_\varepsilon(P)$ の中の P 以外, つまり, $U_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$ で定義されているとする (P で定義されている必要はない).



- 点 (x, y) が点 $P(a, b)$ に限りなく近づくとき, $f(x, y)$ の値が一定の値 l に限りなく近づくとき

(x, y) が (a, b) に近づくとき, $f(x, y)$ の**極限值**は l である

といい

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l, \quad f(x, y) \rightarrow l \text{ as } (x, y) \rightarrow (a, b)$$

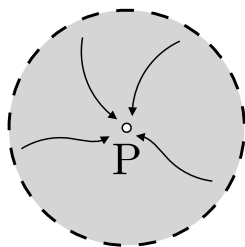
などと表す.

- $\varepsilon - \delta$ 式** に表すと, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$ であるとは,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

が成り立つこと」である.



- (x, y) を (a, b) に限りなく近づけるととき, 例えば, 近づける方向によって $f(x, y)$ の近づく値が異なる場合には極限值が存在しないを考える.

定理 1.1

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l, \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = m$ のとき

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} kf(x,y) = kl \quad (k: \text{定数})$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x,y) + g(x,y)\} = l + m$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)g(x,y) = lm$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m} \quad (\text{ただし } m \neq 0)$$

例題 1

次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

解

$$(1) f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ とおく.}$$

- (x,y) を極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ で表すと

$$f(x,y) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r^2}} = r \cos \theta \sin \theta,$$

$$|f(x,y)| \leq r |\cos \theta \sin \theta| \leq r$$

- $(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ より $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ である.

$$(2) f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ とおく. 点 } (x,y) \text{ が直線 } y = mx \text{ 上にあるとき}$$

$$f(x,y) = f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

である. したがって (x,y) が直線 $y = mx$ に沿って $(0,0)$ に近づくとき m の値によって異なる値に近づくから $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

注

- (2) において $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos \theta \sin \theta$$

となるときは r がなくなってしまう. この場合は $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ は存在しないと疑う.

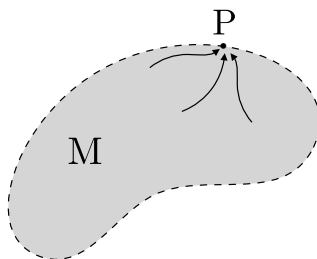
- 極座標で表したとき, $r \rightarrow 0$ のとき $g(r) \rightarrow 0$ となる r だけの関数を用いて

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq g(r)$$

のような不等式が作れてやっとならば $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ と結論づけられる.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ は存在するか考えてみよ.

例題 1 続き: 教科書にある $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ についてコメントしよう. 関数 $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ は直線 $x + y = 0$ 上で定義されておらず, 今までの例のように (x,y) を近づける先の点 P 以外の点で定義されている場合と異なる. この場合, $(x,y) \rightarrow (1,-1)$ は「 (x,y) は定義域内の点を取りながら $(1,-1)$ に限りなく近づく」と考える.



この場合, $x + y \neq 0$ であるから

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x-y) = 2$$

である.

1.3 関数の連続性

- $f(x, y)$ はある点 (a, b) の近傍で定義されているとする (今度は (a, b) で定義されている必要がある) .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つとき $f(x, y)$ は点 (a, b) で**連続**であるという. $f(x, y)$ の定義域が (a, b) の近傍でなくても「定義域内で (a, b) に限りなく近づける」という意味で同様に定義される.

- **$\varepsilon - \delta$ 式** に表すと, M を定義域とする関数 $f(x, y)$ が $P(a, b) \in M$ で連続であるとは,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta, \quad (x, y) \in M \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

が成り立つこと」言い換えると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in U_\delta(P) \cap M \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

が成り立つこと」である.

- $f(x, y)$ が 集合 $M \subset \mathbb{R}^2$ の各点で連続であるとき M で**連続**であるという.
- 1 変数関数の場合と同様に $f(x, y), g(x, y)$ がともに (a, b) で連続であれば

$$kf(x, y) \quad (k: \text{定数}), \quad f(x, y) + g(x, y), \\ f(x, y)g(x, y), \quad \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (\text{ただし } g(a, b) \neq 0)$$

も (a, b) で連続である. 合成関数についても同様である.

定理 1.2

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で連続で $f(a, b) \neq 0$ ならば (a, b) のある近傍で $f(x, y)$ と $f(a, b)$ と同符号である.

証明

- $f(a, b) \neq 0$ より $f(a, b) > 0$ あるいは $f(a, b) < 0$ である. $f(a, b) > 0$ とする.
- $f(x, y)$ は (a, b) で連続であるから $\varepsilon = \frac{f(a, b)}{2} > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in U_\delta((a, b)) \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - f(a, b)| < \frac{f(a, b)}{2}$$

つまり

$$(x, y) \in U_\delta((a, b)) \Rightarrow \frac{f(a, b)}{2} < f(x, y) < \frac{3}{2}f(a, b)$$

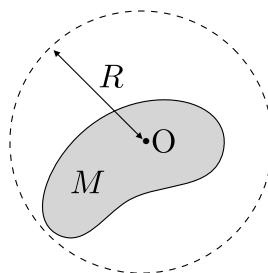
が成り立つ. つまり $U_\delta((a, b))$ 上 $f(x, y) > 0$ である.

- $f(a, b) < 0$ としても同様である.

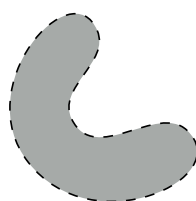
1.4 有界・開集合・閉集合

$M \subset \mathbb{R}^2$ とする.

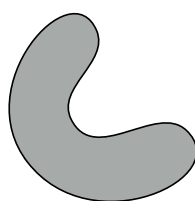
- ある $R > 0$ が存在して $M \subset U_R(O)$ (O : 原点) が成り立つとき M は**有界**であるという.



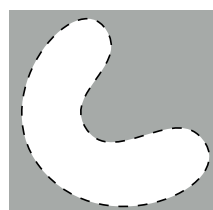
- 任意の $(x, y) \in M$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると $U_\varepsilon((a, b)) \subset M$ とできるとき M は**開集合**であるという.
- $M = G^c$ (G : 開集合) と表されるとき, M は**閉集合**であるという. ただし A^c は A の補集合を表す.



開集合



閉集合



定理 1.3(Weierstrass の最大値定理)

有界な閉集合 M で連続な関数 $f(x, y)$ は M で最大値と最小値をとる, つまり, ある $(x_*, y_*), (x^*, y^*) \in M$ が存在して

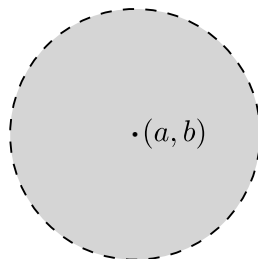
$$f(x_*, y_*) \leq f(x, y) \leq f(x^*, y^*) \quad ((x, y) \in M)$$

が成り立つ.

2 偏導関数

2.1 偏微分係数

- 2変数関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍で定義されているとする.



- $y = b$ と固定すると $z = f(x, b)$ となり x の (1変数) 関数となる. この関数が $x = a$ で微分可能, つまり

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき, $f(x, y)$ は点 (a, b) で x について**偏微分可能**であるという. このとき, この極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x についての**偏微分係数**といい

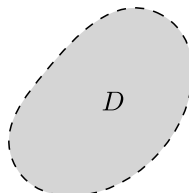
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), f_x(a, b)$$

などと表す.

- y について偏微分可能, y についての偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), f_y(a, b)$ も同様に定義される.

2.2 偏導関数

- $z = f(x, y)$ はある開集合 D で定義されているとする.



- $f(x, y)$ が D の各点 (x, y) で x について偏微分可能であるとき, D 上で2変数関数

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

が定義される. この関数を $f(x, y)$ の x についての**偏導関数**といい

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x(x, y), f_x, z_x$$

などと表される.

- y についての偏導関数についても同様に定義され

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, f_y(x, y), f_y, z_y$$

などと表される.

- x (あるいは y) についての偏導関数を求めることを x (または y) で**偏微分する**という.
- 偏導関数 f_x, f_y が D 上で連続であるとき, f は D 上で C^1 級であるといい, $f \in C^1(D)$ ともかく.
- 偏導関数は本質的に1変数関数の導関数であるから, 片方の変数を定数と考え, 1変数関数の微分公式を用いることができる.

例題 1

次の関数を x および y で偏微分せよ.

$$(1) z = x^4y + xy^2$$

$$(2) z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

解

- x で偏微分するとき y は定数とみなす. y で偏微分するとき x は定数とみなす.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = 4x^3y + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = x^4 + 2xy$$

- 1 変数関数の微分で $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ と合成関数の微分公式を用いる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \frac{x}{y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)_x \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)_y \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

//

- 1 変数関数のとき, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続であった. しかし, 2 変数関数について $f(x, y)$ が (a, b) で x についても y についても偏微分可能であっても $f(x, y)$ は (a, b) で連続とは限らない.

例

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

は点 $(0, 0)$ において x, y について偏微分可能であるが点 $(0, 0)$ で連続ではない. 実際, $h \neq 0$ ならば

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

であるから $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ である, つまり $f_x(0, 0) = 0$ である. 同様に $f_y(0, 0) = 0$ である. 一方, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ は存在しない. したがって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続ではない.

2.3 高次偏導関数

- 関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がさらに x, y について偏微分可能であるとき, その偏導関数を $f(x, y)$ の**第2次偏導関数**といい, 次のように表す:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = z_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = z_{yx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = z_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = z_{yy},\end{aligned}$$

- $z = f(x, y)$ はその第2次までの偏導関数が全て連続であるとき **C^2 級**であるといわれる.
- 第 n 次偏導関数, C^n 級も同様に定義される.

例題 2

$z = x^3 + 3x^2y + 2y^3$ の第2次偏導関数を求めよ.

解

$$\begin{aligned}z_x &= 3x^2 + 6xy, \quad z_y = 3x^2 + 6y^2, \\ z_{xx} &= 6x + 6y, \quad z_{xy} = 6x, \quad z_{yx} = 6x, \quad z_{yy} = 12y\end{aligned}$$

//

2.4 偏微分の順序

- 関数 $f(x, y)$ に対して一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ であるが, 次のことが成り立つ.
- 改めて関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) の近傍で定義されているとする.

定理 2.1

第2次偏導関数 f_{xy} , f_{yx} が (a, b) で連続ならば $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成り立つ.

証明

•

$$\begin{aligned}U(h, k) &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b), \\ \varphi(x) &= f(x, b + k) - f(x, b)\end{aligned}$$

とおくと

$$U(h, k) = \varphi(a + h) - \varphi(a) \quad (2.1)$$

である.

- $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ の近傍で偏微分可能であるから φ は $x = a$ で微分可能である. したがって平均値の定理より

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} = \varphi'(c)$$

つまり

$$U(h, k) = \varphi(a + h) - \varphi(a) = h\varphi'(c) \quad (2.2)$$

となる c が a と $a + h$ の間に存在する.

- $\varphi'(c) = f_x(c, b + k) - f_x(c, b)$ である. y の関数 $f_x(c, y)$ は $y = b$ で微分可能であるから平均値の定理を再び用いて

$$\frac{f_x(c, b + k) - f_x(c, b)}{k} = f_{xy}(c, d)$$

となる d が b と $b + k$ の間に存在する.

- まとめると

$$\varphi'(c) = kf_{xy}(c, d) \quad (2.3)$$

となる d が b と $b + k$ の間に存在することになる.

- (2.1), (2.2), (2.3) より

$$f_{xy}(c, d) = \frac{U(h, k)}{hk}$$

を得る. $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすると $c \rightarrow a$, $d \rightarrow b$ となるので f_{xy} の連続性から

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{U(h, k)}{hk}$$

が成り立つ.

- φ のかわりに $\psi(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$ を用いて同様に考えると

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{U(h, k)}{hk}$$

がわかるので $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成り立つことがわかる. $\square$

補足 講義ではここで説明を終えるが、同様に考えるところを実際にやってみると以下のようになる：

- $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ とすると

$$U(h, k) = \psi(b+k) - \psi(b) \quad (2.4)$$

である.

- $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ の近傍で偏微分可能であるから ψ は $y = b$ で微分可能である. したがって平均値の定理より

$$\frac{\psi(b+k) - \psi(b)}{k} = \varphi'(d)$$

つまり

$$U(h, k) = \psi(b+k) - \varphi(b) = k\varphi'(d) \quad (2.5)$$

となる d が b と $b+k$ の間に存在する.

- $\psi'(d) = f_y(a+h, d) - f_y(a, d)$ である. x の関数 $f_y(x, d)$ は $x = a$ で微分可能であるから平均値の定理を再び用いて

$$\frac{f_y(a+h, d) - f_y(a, d)}{h} = f_{yx}(c, d)$$

となる c が a と $a+h$ の間に存在する.

- まとめると

$$\psi'(c) = hf_{yx}(c, d) \quad (2.6)$$

となる c が a と $a+h$ の間に存在することになる.

- (2.4), (2.5), (2.6) より

$$f_{yx}(c, d) = \frac{U(h, k)}{hk}$$

を得る. $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすると $c \rightarrow a$, $d \rightarrow b$ となるので f_{xy} の連続性から

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{U(h, k)}{hk}$$

が成り立つ.