2026年度　データサイエンス数学基礎/統計学　（担当：松澤　寛）　レジメ

No.9　正規分布

正規分布

- 指数関数 e^x を $\exp(x)$ と書くこともある．
- 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が正の定数 μ, σ に対して

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

で与えられるとき，この確率分布を**正規分布**といい，$\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$ で表す．また，このとき X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うといい，$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ と表す．

$N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ は次の性質をもつ：

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- **直線 $\boldsymbol{x = \mu}$ で対称**
- $x = \mu$ で最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- $(\mu \pm \sigma, f(\mu \pm \sigma))$ が変曲点

正規分布の平均と分散

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ について，平均は μ, 分散は σ^2 である．

- 平均が 0, 分散が 1 の正規分布 $N(0, 1)$ を**標準正規分布**という．
- 確率変数 Z が $N(0, 1)$ に従うとき，Z の確率密度関数 ϕ は

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$$

- 巻末の正規分布表は，$N(0,1)$ の分布関数

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt$$

の値を $0.00 \leq z \leq 3.99$ である z について示したもの．

例題 1

Z が標準正規分布に従うとき，次の確率の値を求めよ．

(1) $P(0.61 \leq Z \leq 0.82)$

(2) $P(Z \geq 1.57)$

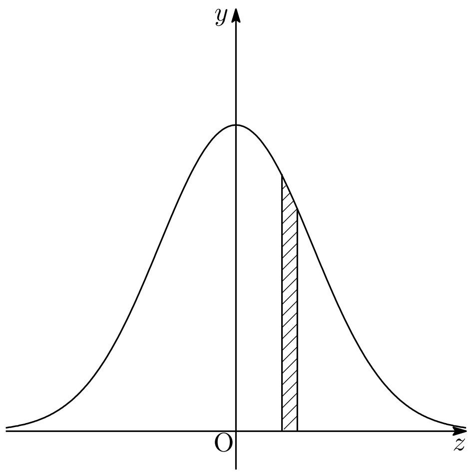
(3) $P(Z \leq -2.06)$

(4) $P(-1 \leq Z \leq 2)$

解

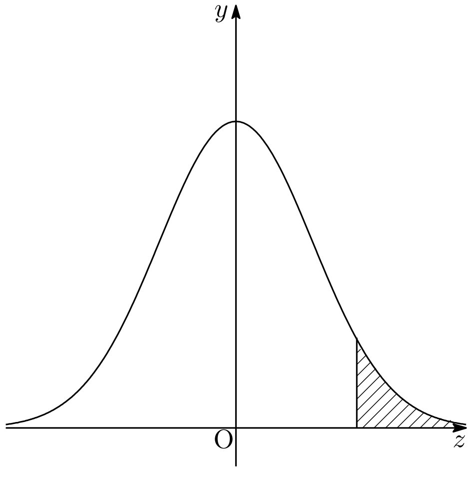
(1)

$$\begin{aligned} P(0.61 \leq Z \leq 0.82) = P(Z \leq 0.82) - P(Z \leq 0.61) &= \Phi(0.82) - \Phi(0.61) \\ &= 0.7939 - 0.7291 = \mathbf{0.0648} \end{aligned}$$



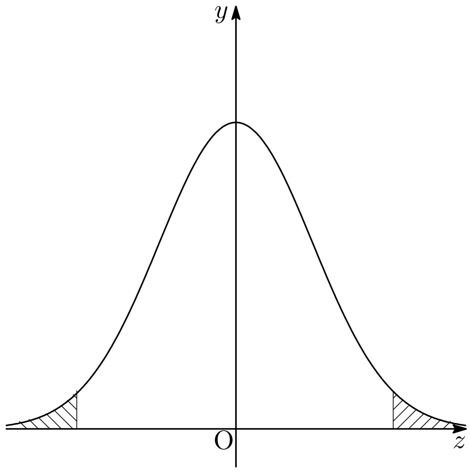
(2)

$$P(Z \geq 1.57) = 1 - P(Z \leq 1.57) = 1 - \Phi(1.57) = 1 - 0.9418 = \mathbf{0.0582}$$

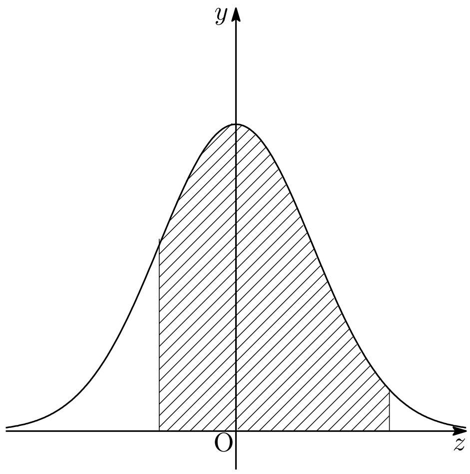


(3) グラフの対称性を利用する．

$$P(Z \leq -2.06) = P(Z \geq 2.06) = 1 - P(Z \leq 2.06) = 1 - \Phi(2.06) = 1 - 0.9803 = \mathbf{0.0197}$$



$$P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 1)\}$$
$$= \Phi(2) - \{1 - \Phi(1)\} = 0.9772 - (1$$



一般の正規分布の場合 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とすると，実数 c に対して

$$P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

右辺の積分で，$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ とすると，$dx = \sigma dz$ であり，$x : -\infty \to c$ は $z : -\infty \to \dfrac{c-\mu}{\sigma}$ となるので

$$P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \ \leftarrow N(0,1) \text{ の確率密度関数}$$

よって，X を標準化した確率変数 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ は $N(0,1)$ に従う．

正規分布の標準化

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ならば $Z \sim N(0,1)$ であり

$$P(X \leq c) = P\left(Z \leq \frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

例題 2

X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，次の確率の値を求めよ．

(1) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

(2) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

(3) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

解 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと $Z \sim N(0,1)$

(1) $-\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma \leftrightarrow -1 \leq Z \leq 1$ であるから

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2\{P(Z \leq 1) - 0.5\} = \mathbf{0.6826} \end{aligned}$$

(2) $-\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma \leftrightarrow -2 \leq Z \leq 2$ であるから

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2\{P(Z \leq 2) - 0.5\} = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

(3) $-\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma \leftrightarrow -3 \leq Z \leq 3$ であるから

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= P(-3 \leq Z \leq 3) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 2\{P(Z \leq 3) - 0.5\} = \mathbf{0.9974} \end{aligned}$$