

## No.8 連続型確率変数と確率分布

### 連続型確率変数

2項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $X$  のとりうる値は  $X = 0, 1, \dots, n$  であった. このように飛び飛びの値をとる確率変数を**離散型**. これに対して,  $X$  がある範囲の実数全体をとり得るような**連続型**の確率変数を扱う.

**例 1** A 駅から B 駅に向かう電車は毎時 0 分と 20 分に A 駅を発車する. 13 時から 14 時の間に A 駅に到着する人が電車を待つ時間を  $X$  分とする.

- $X$  は 0 から 40 まで任意の実数の値をとる**連続型**である.

- 連続型では 1 つの実数  $x$  に対して  $P(X = x)$  は 0 である.

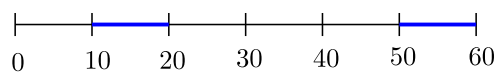
$X = 15 \rightarrow$  「15 分 00 秒 00000... 待った」  $\rightarrow$  どうやって観測する? 「15 分待った」とは人により違うが, まあ 14 分 30 秒から 15 分 30 秒くらい待ったとき?

- 連続型確率変数では任意の実数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対して  $a \leq X \leq b$  となる確率を考える.

- 待ち時間が 10 分以内である確率  $P(0 \leq X \leq 10)$

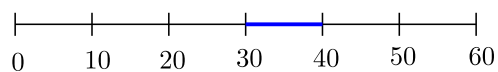
待ち時間が 10 分以内  $\rightarrow$  下図の色をつけた部分に A 駅に到着した場合

$$P(0 \leq X \leq 10) = \frac{10 + 10}{60} = \frac{1}{3}$$



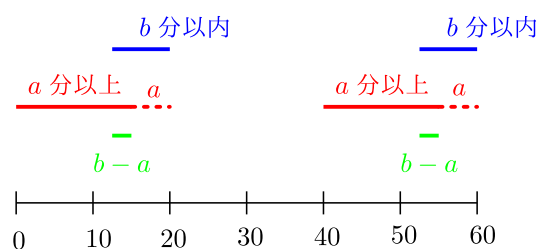
- 待ち時間が 30 分以上である確率  $P(X \geq 30)$

待ち時間が 30 分以上  $\rightarrow$  下図の色をつけた部分に A 駅に到着した場合



$$P(X \geq 30) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

- 同様に  $a < b$  である定数  $a, b$  について  $0 \leq a < b \leq 20$  のとき  $P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{30}$



- $20 \leq a < b \leq 40$  のとき  $P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{60}$

- $a \geq 40$  または  $b \leq 0$  のとき  $P(a \leq X \leq b) = 0$

$X$  の値がある区間に入る確率をその区間の幅で割ったもの、すなわち単位幅の区間あたりの確率を**確率密度**という。

- $0 \leq a < b \leq 20$  のとき  $\frac{1}{b-a}P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{30}$
- $20 \leq a < b \leq 40$  のとき  $\frac{1}{b-a}P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{60}$
- $a \geq 40$  または  $b \leq 0$  のとき  $\frac{1}{b-a}P(a \leq X \leq b) = 0$

以下  $\Delta x > 0$  とする。

連続型確率変数  $X$  のとり得る値  $x$  について、区間  $[x, x + \Delta x]$  における確率密度

$$\frac{1}{\Delta x}P(x \leq X \leq x + \Delta x)$$

の  $\Delta x \rightarrow 0$  における極限が存在するとすれば、その極限值は  $x$  の関数である。これを  $f(x)$  とおくと

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x}P(x \leq X \leq x + \Delta x)$$

$f(x)$  を確率変数  $X$  の**確率密度関数**という。

**例 2** 最初の例  $X$  について、 $\Delta x > 0$  を十分小さくとると

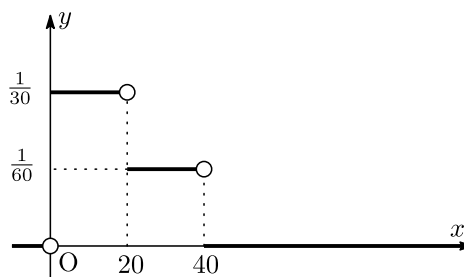
- $0 \leq x < 20$  のとき  $0 \leq x < x + \Delta x < 20$  だから  $\frac{1}{\Delta x}P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{1}{30}$  . よって  $f(x) = \frac{1}{30}$

同様にして

- $20 \leq x < 40$  のとき  $f(x) = \frac{1}{60}$
- $x \geq 40$  または  $x < 0$  のとき  $f(x) = 0$

よって、確率密度関数は

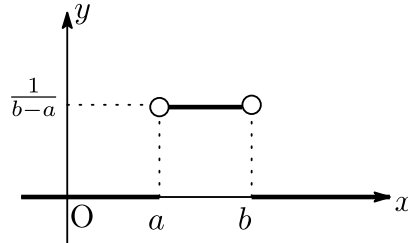
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & (0 \leq x < 20), \\ \frac{1}{60} & (20 \leq x < 40), \\ 0 & (x < 0, x \geq 40) \end{cases}$$



## 一様分布

- 定数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対して  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a < x < b), \\ 0 & (x \leq a, x \geq b), \end{cases}$$



を満たすとき、 $X$  は  $(a, b)$  上の**一様分布**に従うという。

- 一様分布は  $X$  が  $(a, b)$  内の実数についてどの値をとることも同程度に期待できることを意味する。
- $x = a, x = b$  での  $f(x)$  の値を  $\frac{1}{b-a}$  にするか 0 にするかは  $P(X = a)$  も  $P(X = b)$  も 0 であるから確率の計算には影響しない。

## 確率密度関数・分布関数の性質

連続型確率変数  $X$  について、 $X \leq x$  である確率を  $F(x)$  とする：

$$F(x) = P(X \leq x) (= P(-\infty < X \leq x))$$

$F(x)$  を  $X$  の**(累積) 分布関数**という。

### 分布関数

確率変数  $X$  の分布関数は以下の性質をもつ

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$
- $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
- $a < b$  のとき

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

**注**  $P(X = a) = P(X = b) = 0$  より

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$\Delta x > 0$  のとき

$$\frac{1}{\Delta x} P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

であるから

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

これより  $f(x) = F'(x)$

両辺を  $(-\infty, \infty)$  あるいは  $[a, b]$  で積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{\infty} = 1$$
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$$

### 分布関数・確率密度関数

確率変数  $X$  の分布関数を  $F(x)$ , 確率密度関数を  $f(x)$  とすると

- $f(x) \geq 0$
- $F(x)$  が微分可能であれば  $F'(x) = f(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

### 例題 1

$X$  の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるとき, 定数  $k$  の値を定め, 確率  $P(-0.5 \leq X \leq 1.5)$  の値を求めよ.

**解**  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 k(1 - x^2)dx = k \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}k \quad \text{よって } k = \frac{3}{4}$$

このとき  $f(x) = 0$  ( $|x| \geq 1$ ) に注意して

$$P(-0.5 \leq X \leq 1.5) = \int_{-0.5}^{1.5} f(x)dx = \int_{-0.5}^1 \frac{3}{4}(1 - x^2)dx = \frac{27}{32}$$

### 連続型確率変数の平均と分散

- $X$  が離散型で  $P(X = x_i) = p_i$  のとき

$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$

であった (値と確率の積の和).

- $X$  を連続型確率変数,  $f(x)$  をその確率密度関数とする.  $\Delta x > 0$  が十分小さいとき

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

であるので, 離散型の場合に対応して  $X$  の **平均 (期待値)** を次の積分で定義する:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- $\mu = E[X]$  とおくと,  $X$  の **分散  $V[X]$** , **標準偏差  $\sigma$**  を次の式で定義する:

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

ただし, 関数  $\varphi(x)$  に対して  $\varphi(X)$  の平均  $E[\varphi(X)]$  を次で定義する:

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

### 平均と分散の性質

$a, b$  を定数とするとき

1.  $E[aX + b] = aE[X] + b$
2.  $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
3.  $V[aX + b] = a^2V[X]$

### 例題 2

$X$  の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられるとき,  $X$  の平均・分散を求めよ.

**解**  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = 0$

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$