2026 年度　データサイエンス数学基礎/統計学　（担当：松澤　寛）　レジメ

No.6　条件付き確率と事象の独立性

確率の定義

箱の中に数字が書かれた 6 枚のカードが入っている（数字は片面）.

- 赤いカードは次の 3 枚：1, 1, 2 (順に R_{11}, R_{12}, R_2 とする)
- 青いカードは次の 3 枚：1, 2, 2 (順に B_1, B_{21}, B_{22} とする)

箱の中から 1 枚カードを引くという試行において，標本空間は $\Omega = \{R_{11}, R_{12}, R_2, B_1, B_{21}, B_{22}\}$

Q 1 枚引いたところ，赤いカードであった（数は見えてない）. このとき，数字が 1 である確率は？

- 赤いカードであったという時点で考える根元事象は R_{11}, R_{12}, R_2 の 3 つ. その中で数字が 1 である根元事象は R_{11}, R_{12} の 2 つであるから，$\dfrac{2}{3}$

(1, 1, 2, 1, 2, 2, $\Omega = \{R_{11}, R_{12}, R_2, B_1, B_{21}, B_{22}\}$)

- この試行において，赤いカードであるという事象を A, 書いてある数字が 1 であるという事象を B とすると

  $A = \{R_{11}, R_{12}, R_2\}$, $B = \{R_{11}, R_{12}, B_1\}$, $A \cap B = \{R_{11}, R_{12}\}$

- 上の確率は $\dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

- $\dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

一般に，$P(A) > 0$ である事象 A が起こったという条件のもとで事象 B の起こる**条件つき確率** $\boldsymbol{P_A(B)}$ を

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で定義する.

注 $P_A(B)$ は $P(B|A)$ とも書かれる.

例題 1

よく切ったトランプ 52 枚から 1 枚を抜くとき、その札かがハートであるという事象を A，絵札であるという事象を B とする. このとき $P_A(B)$ および $P_B(A)$ を求めよ.

解

$$P(A) = \frac{13}{52},\ P(B) = \frac{12}{52},\ P(A \cap B) = \frac{3}{52}$$

だから

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{13}{52}} = \mathbf{\frac{3}{13}}$$

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{12}{52}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

条件付き確率の定義式 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ から $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ が得られる．A, B を入れかえても $P(A \cap B)$ は変わらないので次を得る：

確率の乗法定理

$P(A) > 0$, $P(B) > 0$ のとき

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

例題 2

8 本のくじの中に当たりくじが 2 本あり，A，B の 2 人が順に 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，A は引いたくじを戻さないとする．

(1) A が当たる

(2) A が当たって B も当たる

(3) A がはずれて B が当たる

(4) B が当たる

解 A が当たるという事象を A, B が当たるという事象を B とする．

(1) $P(A) = \dfrac{2}{8} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2) $P(A \cap B) = P(A)P_A(A \cap B)$ である．$P_A(B) = \dfrac{1}{7}$ (A があたりを引いているので，残りは 7 本の中に当たり 1 本) だから

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{1}{28}}$$

(3) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$ である．$P(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}$, $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{2}{7}$ だから

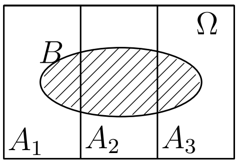
$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{3}{14}}$$

(4) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{1}{28} + \dfrac{3}{14} = \dfrac{7}{28} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

乗法定理の応用：場合分けの公式（全確率の公式）

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反，つまり $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$
- $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

とする（事象 $A_1, \cdots, A_n$ のうちただ 1 つの事象が必ず起こる）.



この時

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

さらに $P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき，各項に乗法定理を用いると

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) P_{A_i}(B)$$

であるから次を得る：

場合分けの公式（全確率の公式）

- A_1, A_2, $\cdots, A_n$ は互いに排反
- $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$
- $P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

とする．このとき

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

事象の独立

箱の中に数字が書かれた 9 枚のカードが入っている（数字は片面）.

- 赤いカードは次の 3 枚：**1**, **1**, **2**
- 青いカードは次の 3 枚：**1**, **2**, **2**
- 白のカードは次の 3 枚：$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{1}}$

$\boxed{\mathbf{Q}}$ 1 枚引いたところ，赤いカードであった（数は見えてない）．このとき，数字が 1 である確率は？

- 1 枚引いたとき，赤いカードであるという事象を A，書いてある数字が 1 であるという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

あるから条件つき確率の定義より

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

- ところが今回

$$\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$$

  が成り立っている．これは**「カードの色が赤である」という情報は「カードの数が 1 である」という確率に影響を及ぼさない**ことを意味する．

一般に $P(A) > 0$ である事象 A と B の間に上の関係が成り立つとき，**B は A に独立**であるという．B が A に独立であるとき，乗法定理から

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$$

が成り立つ．

事象の独立

A と B が**互いに独立**であるとは $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$ が成り立つことをいう．

実際，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとき，

- $P(A) > 0$ であれば

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

  であるので **B は A に独立**である．

- $P(B) > 0$ であれば

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A)}{P(B)} = P(A)$$

  であるので **A は B に独立**である．

例題 3

大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，大きいさいころの目が 3 以下である事象を A，小さいさいころの目が 3 の倍数である事象を B とするとき，A と B は互いに独立であるかどうかを調べよ．

解 根元事象は 36 個．さいころの目の組を (大, 小) $= (x, y)$ で表す．

- A の根元事象 (x, y) は $x = 1, 2, 3, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ であるから 18 個．したがって $P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- B の根元事象 (x, y) は $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, y = 3, 6$ であるから 12 個．したがって $P(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$
- $A \cap B$ の根元事象 (x, y) は $x = 1, 2, 3,\ y = 3, 6$ であるから 6 個．したがって $P(A \cap B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A)P(B)$$

が成り立つので互いに独立である．□