2026年度　データサイエンス数学基礎/統計学　（担当：松澤　寛）　レジメ

No.2　数理基礎（線形代数）

行列

- 数を長方形状に並べたもの

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  を m 行 n 列の**行列**，(m,n) 行列，$m \times n$ 行列という．$m \times n$ をその行列の**型**という．$m \times n$ 行列には m 個の行（$\rightarrow$），n 個の列 $(\downarrow)$ がある．上から i 番目の行を第 i 行，左から j 番目の列を第 j 列という．第 i 行かつ第 j 列にある成分を (i,j) 成分といい，a_{ij} と表す．(i,j) 成分を代表して上の行列を (a_{ij}) あるいは $(a_{ij})_{i,j}$ と表す．

- $1 \times n$ 行列 $(a_{11} \ \cdots \ a_{1n})$ を**行ベクトル**，$m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ を**列ベクトル**という．

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ は 3×4 行列であり，$(2,3)$ 成分は　であり，$(3,1)$ 成分は　である．

- A, B を $m \times n$ 行列とする．全ての成分が等しい，$A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j}$ とするとき

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n)$$

  が成り立つとき A と B は**等しい**といい $A = B$ と表す．

- すべての成分が 0 である行列を**零行列**といい O で表す．$m \times n$ 行列であることを明示するときは $O_{m,n}$ とも表す．

- $n \times n$ 行列，つまり行の数と列の数が等しい行列を n 次の**正方行列**という．

- 正方行列において，(i,i) 成分（対角成分）が 1 で他が 0 である行列を**単位行列**といい E あるいは次数を明示して E_n と表す：

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行基本変形　行列に対して次の操作を**行基本変形**という：

1. ひとつの行を $c(\neq 0)$ 倍する．
2. ふたつの行を入れ換える．
3. ひとつの行を $c(\neq 0)$ 倍した行を，他の行に加える．

例

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 1 行目と 2 行目の入れ換えると, $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 1 行目と 4 倍すると, $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 1 行目と 4 倍したものを 3 行目に足すと, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

行列の階数 行列 A に対して, 行基本変形を繰り返すと, 以下のような階段状の行列に変形できる：

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & d_1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $d_i \neq 0$, $*$ は任意の数である.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \text{(2 行目)+(1 行目)} \times \text{(-5)} \\ \text{(3 行目)+(1 行目)} \times 4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \text{(3 行目)+(1 行目)} \times 11/3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -86/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

得られた階段行列に対して少なくとも 1 つの成分が 0 でない行の数を **行列の階数** といい, $\mathrm{rank} A$ で表す.

注意：基本変形は色々あるが, 階数は行の基本変形に依存しない.

例 上記の例は, 階数が 3.

行の基本変形と連立方程式 次の連立方程式を考える：

$$\begin{cases} 3x + y - 7z = 0 & (1) \\ 4x - y - z = 5 & (2) \\ x - y + 2z = 2 & (3) \end{cases}$$

(1) と (3) の入れ替えると

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 & (4) \\ 4x - y - z = 5 & (5) \\ 3x + y - 7z = 0 & (6) \end{cases}$$

次に $(5)-(4)\times 4, (6)-(4)\times 3$ を実行すると

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & - & y & + & 2z & = & 2 & & (7) \\ & & 3y & - & 9z & = & -3 & i.e., y-3z=-1 & (8) \\ & & 4y & - & 13z & = & -6 & & (9) \end{array}\right.$$

次に $(9)-(8)\times 4$ を実行すると

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} x & - & y & + & 2z & = & 2 & (10) \\ & & y & - & 3z & = & -1 & (11) \\ & & & - & z & = & -2 & (12) \end{array}\right.$$

上記の 3 つの連立方程式は同じ連立方程式とみなせる．連立方程式を解くのは係数だけを取り出した行列の行基本変形と同じである：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & -6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -13 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

このように，連立方程式の係数だけを取り出し，その行列に行基本変形を施し、階段行列にすることにより連立方程式を解く方法を**ガウスの消去法**という.