2026年度　データサイエンス数学基礎（担当：松澤　寛）　レジメ

No.1　数理基礎（微分積分）

2次関数 2次関数 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

- $a > 0$ のとき，グラフは下に凸の放物線，$a < 0$ のとき，グラフは上に凸の放物線

- 頂点の座標と軸は平方完成を行う．

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + 1 \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

三角関数

- 弧度法：半径と同じ長さの弧をもつ扇型の中心角を1ラジアンと定義する．

$$180^\circ = \qquad , \frac{\pi}{6} = \qquad ^\circ$$

- xy 平面上に原点を中心とする半径1の円をかく．この円の上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とするとき，OP と x 軸正の向きとなす角を θ とするとき，P の x 座標を $\cos\theta$，y 座標を $\sin\theta$ と定義する．また，$\dfrac{y}{x}$ を $\tan\theta$ と表す．

- 重要な公式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta, \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

- 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) =$$
$$\sin(\alpha-\beta) =$$
$$\cos(\alpha+\beta) =$$
$$\cos(\alpha-\beta) =$$

指数関数

- 定数 $a>0,\ a\neq 1$ に対して関数 $y=a^x$ を指数関数という．a を**底**という．
- 指数関数の定義域はすべての実数，値域は正の実数全体である．
- $y=a^x$ は $a>1$ のとき単調増加，$0<a<1$ のとき単調減少である．

- 任意の正の数 A に対して $a^x=A$ となる実数 x がただ 1 つ存在する．

対数関数

- $a>0,\ a\neq 1$ とする．任意の正の数 A に対して $a^x=A$ となる実数 x を $x=\log_a A$ と表し，a を底とする A の**対数**という．

$$\log_2 8 = \qquad \log_2\sqrt{2} = \qquad \log_2\frac{1}{4} =$$

- $y=\log_a x$ を**対数関数**という．対数関数 $y=\log_a x$ の定義域は $x>0$，値域はすべての実数である．
- 対数関数 $y=\log_a x$ は $a>1$ のとき単調増加，$0<a<1$ のとき単調減少である．また，指数関数 $y=a^x$ と直線 $y=x$ に関して対称である．

微分（導関数）

- 関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，y の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を変化の割合あるいは平均変化率という．これは，2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きである．

- $b=a+h$ とすると，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である．h は 0 とはできないが，0 以外の値をとりながら，0 に「限りなく近づける」とき平均変化率の値が一定の値に近づくならば，その値を $f'(a)$ と表し，関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**という．このことを次のように表す：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と表す．$f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きである．

- $f'(a)>0$ であるとき，関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で増えてる最中，つまり，$x=a$ の「まわり」で単調増加である．$f'(a)<0$ であるとき，関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で減っている最中，つまり，$x=a$ の「まわり」で単調減少である．

- 関数が増えている最中か減っている最中かを調べるには，さまざまな a に対して $f'(a)$ の値を調べればよい．a を x に変えて，x に対して $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の**導関数**という．つまり

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である．導関数を求めることを**微分する**という．関数 $f(x)$ を微分することを $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とも表す．

導関数の公式

- n を実数とするとき $(x^n)'=nx^{n-1}$

- 定数 c について $(c)'=0$

- $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
  $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ である.
- $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
- x を弧度法で表されているとするとき $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ である.

指数関数・対数関数の導関数

- 指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を考えよう.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \frac{a^h-1}{h}$$

  である.

- ここで $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1$ となる a を**ネピアの数**あるいは**自然対数の底**といい，$\boldsymbol{e}$ で表す．このとき

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x$$

  である.

- 例えば e^{2x} は $f(x) = e^x$, $g(x) = 2x$ として $e^{2x} = f(g(x))$ であるので $(e^{2x})' = f'(g(x))g'(x) = e^{2x}2 = 2e^{2x}$ である.
- 底が e の対数は $\log x$ と底を省略する．$y = \log x$ の導関数をもとめよう．$f(x) = e^x$，$f(x) = \log x$ とすると，$x = f(g(x))$ であるので，両辺を x で微分すると

$$1 = f'(g(x))g'(x) \quad (\log x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

  である.

三角関数の導関数

- 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の x は弧度法で考えるものとする.
- 加法定理を用いることにより $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ さらに商の導関数の公式により $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が得られる.

積分 1（不定積分）

- 関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．$F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの原始関数とするとき，任意の定数 C に対して $F(x)+C$ も原始関数であり，$f(x)$ の原始関数はこの形のものに限られる．原始関数は不定積分ともいわれ（本来は原始関数と不定積分は異なる概念）

$$F(x) = \int f(x)dx + C \quad (C : \text{定数})$$

  と書かれる.

- c を定数とするとき $(ax)' = a$ であるから $\displaystyle\int cdx = ax + C$
- $n \neq -1$ のとき $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$ であるから $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
- $(\sin x)' = \cos x$ であるから $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$
- $(-\cos x)' = \sin x$ であるから $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
- $(e^x)' = e^x$ であるから $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
- $\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$ であるから $\displaystyle\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

積分 2（定積分）

- $a \leqq x \leqq b$ を満たす x の集合を**閉区間**といい $[a, b]$ と表す．$a < x < b$ を満たす x の集合を**開区間**といい (a, b) と表す（座標と間違えないように）．
- $f(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で定義された関数で $f(x) \geq 0$ とする．直線 $x = a$, $x = b$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を考える．

- 閉区間の分割を考える．Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- 閉区間が $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ と n 個の小区間に分けられる．
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から点 z_i （代表点）をとり，横 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，縦 $f(z_i)$ の長方形の面積の和

$$f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \cdots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

を関数 $f(x)$，分割の仕方 Δ，代表点 $\{z_1, \cdots, z_n\}$ の取り方により定まる**リーマン和**という．

- $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$ のうち一番大きいもの $\max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}$ は分割の細かさを表しており，$|\Delta|$ と表す.
- $|\Delta|$ を 0 に近づくように分割を細かくしていくとき，リーマン和が一定の値に近づくとき，その一定の値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表す．$f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ における**定積分**という．これは直線 $x = a$, $x = b$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を表すと考える．$f(x) \geqq 0$ でなくても定積分は定義される．定積分は

$$\int_a^b f(t)dt$$

としてもよい.

積分 3（微分積分学の基本定理）

- $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な関数であるとき，

$$\int_a^x f(t)dt$$

は x の関数であり

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

が成り立つ．この事実を**微分積分学の基本定理という**．つまり

$$\int_a^x f(t)dt$$

（これを $f(x)$ の**不定積分**という）は $f(x)$ の原始関数の 1 つであるということになる．このことから次のこともわかる：$F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの原始関数とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と表し

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と計算する．つまり $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求め，$[F(x)]_a^b$ と書いてから $F(b) - F(a)$ を計算する.

- $\displaystyle\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{4}1^4 = \frac{15}{4}$