

2026 年度 微分方程式Ⅱ（担当：松澤 寛） 自己チェックシート No.03

学科（コース）・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 次の連立微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}, y_1(0) = 2, y_2(0) = -1$$

についてコーシー・リプシッツの定理の証明で出てくる連立積分方程式に直しなさい。また、その証明で定義される $\mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \end{pmatrix}$ に関する漸化式を作り、 $\mathbf{y}_0(x)$, $\mathbf{y}_1(x)$, $\mathbf{y}_2(x)$ を求めよ。

2. 次の、より一般のグロウンウォールの補題示せ： $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ を $[a, b]$ で定義された連続関数で $h(x) \geq 0$ on $[a, b]$ とする。このとき

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x f(t)h(t)dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

を満たすならば

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x g(t)h(t)e^{\int_t^x h(s)ds}dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

が成り立つことを示せ。（**Hint:** $[a, b]$ 上の連続関数 a に対して $e^{-\int_a^x a(r)dr}$ を x で微分するとどうなるかな？）

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ に対して e^{xA} を求めよ。

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ。

- (1) 固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ と固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に対応する射影行列を求めよ。
- (3) e^{xA} を求めよ。

5. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ。

- (1) 固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ と固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に対応する射影行列を求めよ。
- (3) e^{xA} を求めよ。

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ と固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に対応する射影行列を求めよ。
- (3) e^{xA} を求めよ。