2026年度　解析Ⅲ演習（担当：松澤　寛）　レジメ

No.11　（続き）

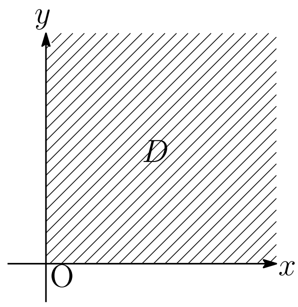
演習 1

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．

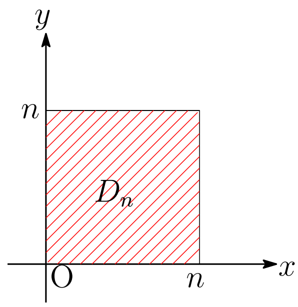
注 $F'(x) = e^{-x^2}$ となる関数 $F(x)$ は初等関数で表すことができない．$\to e^{-(x^2+y^2)}$ の二重積分を利用する．

解

- $D = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．



- D の近似増加列として $D_n = [0,n] \times [0,n]$ をとると



$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^n \left\{ \int_0^n e^{-x^2}e^{-y^2}dx \right\} dy$$
$$= \left(\int_0^n e^{-x^2}dx \right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy \right) = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx \right)^2$$

よって

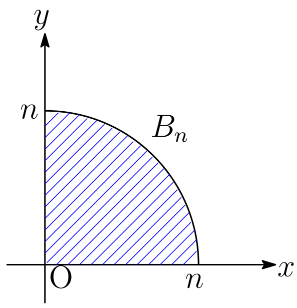
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n e^{-x^2}dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx \right)^2$$

である．

- 次に D の近似増加列として

$$B_n = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

を考える．



- 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により B_n は

  $$E_n = \left\{ (r, \theta) \middle| 0 \leq r \leq n, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

  に対応するので

  $$\begin{aligned} &\iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{E_n} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^n e^{-r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^n e^{-r^2} (-2r) dr \right\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=n} \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2}) d\theta = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

- $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$ より

  $$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n \to \infty} \iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}$$

- したがって

  $$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

  つまり

  $$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

演習 2

ガンマ関数とベータ関数は関係式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

注

- $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \ (s>0)$
  - $0<s<1$ のとき $e^{-x}x^{s-1}$ は $x=0$ で特異性をもつ.
- $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \ (p,\ q>0)$
  - $0<p<1$ のとき $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は $x=0$ で特異性をもつ.
  - $0<q<1$ のとき $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は $x=1$ で特異性をもつ.

解

- $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \ (s>0)$ において $x=t^2$ とおくと

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t^2}t^{2(s-1)}\cdot 2tdt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt$$

- $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \ (p,\ q>0)$ において $x=\cos^2\theta$ とおくと $(\cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0$ $(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]))$

$$B(p,q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2(p-1)}\theta \sin^{2(q-1)}\theta(-2\cos\theta\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

- このとき $D=\{(x,y)|x>0,\ y>0\}$ とおくと

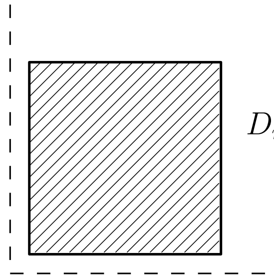
$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right) \\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy\end{aligned}$$

- ここで極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により D は $E=\left\{(r,\theta)\middle| r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$ に対応するので

$$\begin{aligned}&4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} 4\iint_E e^{-r^2}(r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta)(r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta)rdrd\theta \\ &= 4\iint_E e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta drd\theta \\ &= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\right) \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注}}$

- (i) の part：$D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ の近似増加列として $D_n=\left[\dfrac{1}{n},n\right]\times\left[\frac{1}{n},n\right]$ として



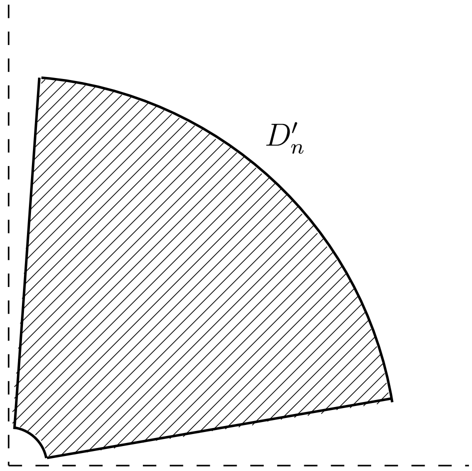
$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy=\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right)$$

であるので $n\to\infty$ とすればよい（関数がすべて非負なので，広義積分については特定の近似増加列を取ればよい）.

- (ii) の part：D の近似増加列として図のような D_n' をとる，具体的には極座標で表したとき

$$E_n=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{1}{n}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\leq r\leq n\right\}$$

となる領域である.



このとき

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n'} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy\\
=&\iint_{E_n} e^{-r^2}(r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta)(r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta)rdrd\theta\\
=&\iint_{E_n} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta drd\theta\\
=&\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta dr\right\}d\theta\\
=&\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\right)
\end{aligned}$$

この式で $n\to\infty$ とすればよい.