2026年度　解析 III 演習 (担当：松澤　寛)　レジメ

No.10　変数変換

まとめ1（変数変換とは）

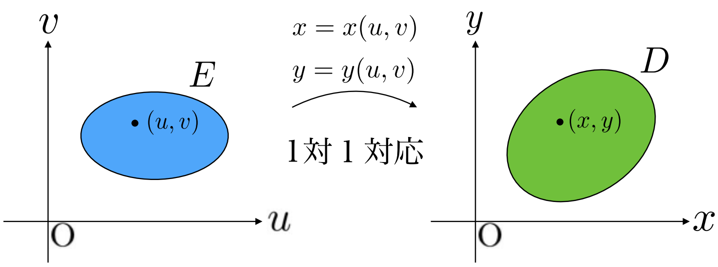
- 変数 x, y と変数 u, v が関係

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

古い変数 = **新しい変数の式**

によって対応づけられているとき，この関係を**変数変換**という．

- 変数変換①により，uv 平面の点を 1 つ決めると xy 平面の点がただ 1 つ定まる．
- 次の仮定をする：
  uv 平面の有界閉領域 E と xy 平面の有界閉領域 D が①により 1 対 1 対応する．



1 対 1 対応とは

- どんな $(x, y) \in D$ に対しても $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ となる $(u, v) \in E$ が存在する（**全射**）.
- (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in E$ が

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow (x(u_1, v_1), y(u_1, v_1)) \neq (x(u_2, v_2), y(u_2, v_2))$$

  が成り立つ（**単射**）.

- このとき D で定義された関数 $f(x, y)$ は変数変換①によって E で定義された (u, v) の関数となる：

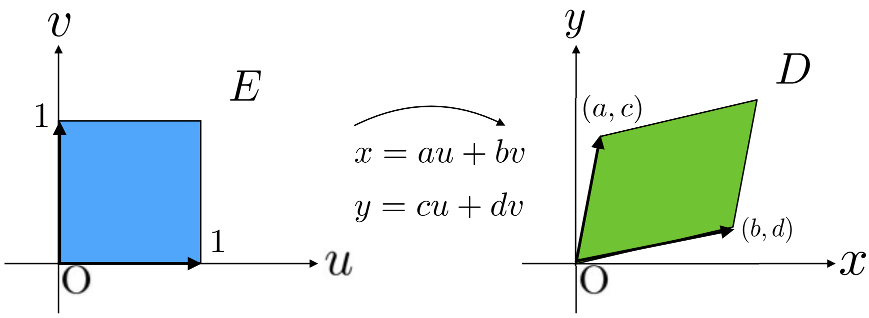
$$f(x(u, v), y(u, v)) \quad (u, v) \in E$$

まとめ2（変数変換の例）

(1) **1次変換**

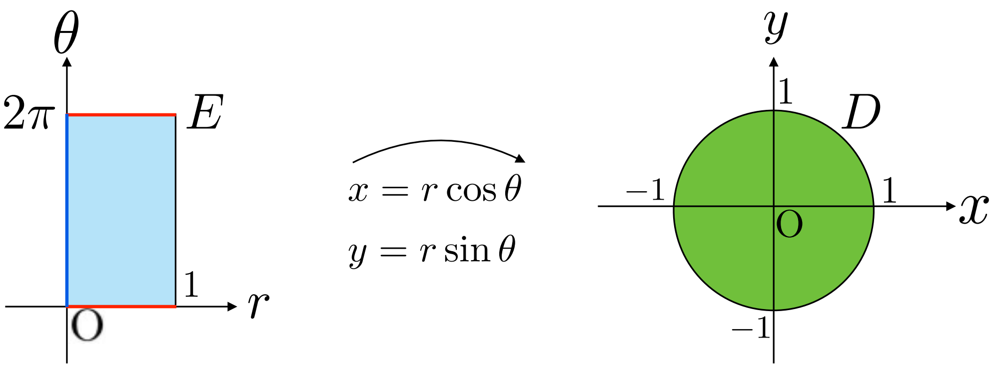
$$x = au + bv$$
$$y = cu + dv$$

は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則，つまり $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき1対1対応となる．



(2) **極座標変換**

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

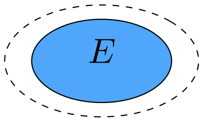


（厳密には1対1ではないが積分には影響しない.）

まとめ 3（変数変換の公式）

- 変数変換 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ により uv 平面の有界閉領域 E と xy 平面の有界閉領域 D が 1 対 1 に対応しているとする．
- $x(u,v)$, $y(u,v)$ は E を含むある開集合で C^1 級であり

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \textbf{(ヤコビアン)}$$



E の近傍

とする．

- このとき E が面積確定なら D も面積確定で D 上積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

（$|J|$ はヤコビアンの<u>絶対値</u>であることに注意）

まとめ 4（極座標変換の場合）

xy 平面の領域 D は極座標変換により $r\theta$ 平面の領域 E と対応しているとする．このとき

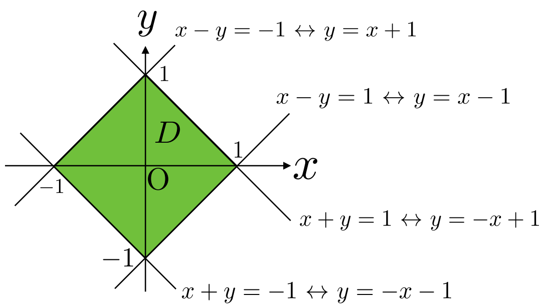
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r drd\theta$$

演習 1

$D=\{(x,y)|-1\leq x+y\leq 1,\ -1\leq x-y\leq 1\}$ のとき

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}dxdy$$

を求めよ.

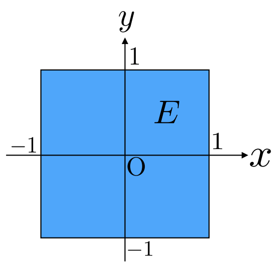


$\boxed{解}$

- $x+y=u,\ x-y=v$ とおくと D は

$$E=\{(u,v)|-1\leq u\leq 1,\ -1\leq v\leq 1\}$$

である.



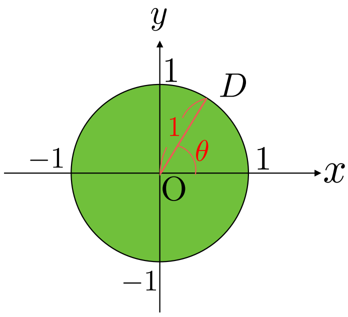
- また $x+y=u,\ -y=v$ より $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(u+v) \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases}$ （本来の変数変換の形）で

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}dxdy=\iint_E \sqrt{u+1}|J|dudv=\iint_E \sqrt{u+1}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$
$$=\iint_E \sqrt{u+1}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}\sqrt{u+1}du\right\}dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{u=-1}^{u=1}dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}dv=\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

演習 2

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ とするとき $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.



$\boxed{\text{解}}$ 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により D に対応する $r\theta-$ 平面の領域 E は

$$E=\{(x,y)|0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi\}\quad(\leq 2\pi\text{でも OK})$$

したがって

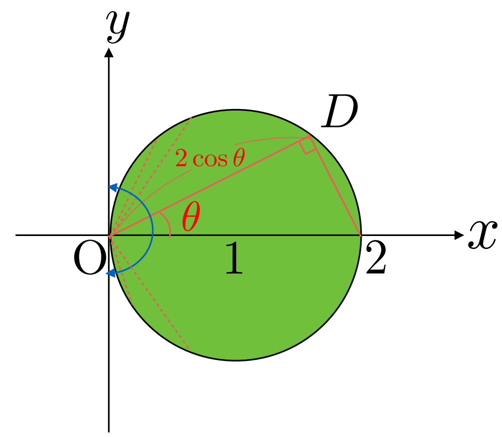
$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_E\sqrt{r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r^2dr\right\}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=1}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{2}{3}\pi$$

演習 3

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x\}$ のとき $\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

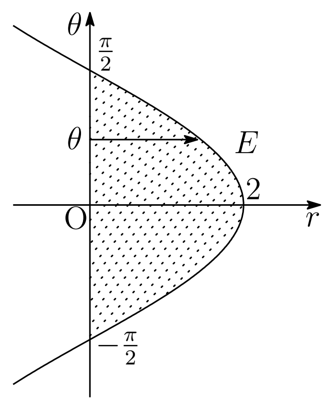
$\boxed{\text{解}}$

- $x^2+y^2\leq 2x$ を変形すると $(x-1)^2+y^2\leq 1$ なので領域 D は円 $(x-1)^2+y^2=1$ とその内部である.



- 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって D は $r\theta-$ 平面の領域

$$E=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq 2\cos\theta\right\}$$



となる.

- $\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-r^2}$ より

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy&=\iint_E\sqrt{4-r^2}rdrd\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-r^2}rdr\right\}d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-r^2}(2r)dr\right\}d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta}\right\}d\theta\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&4-4\cos^2\theta=4(1-\cos^2\theta)=4\sin^2\theta\\
&(4-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=8|\sin^3\theta| \qquad (a^2)^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{a^2})^3=|a|^3=|a^3|
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(8|\sin^3\theta|-8)\right\}\right]d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}(1-|\sin^3\theta|)d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta\\
&=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi-\frac{32}{9}
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ は偶数})\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{ は奇数})\end{cases}$$

を用いた.