2026年度　解析Ⅲ演習（担当：松澤　寛）　レジメ

No.1　2変数関数の極限

まとめ1（2変数関数）

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $M \subset \mathbb{R}^2$ $(M \neq \emptyset)$ とする．
- 各 $(x, y) \in M$ に対してただ1つの $z \in \mathbb{R}$ が定まる時 z は M 上で定義された $(x,\, y$ の$)$**2変数関数**といい，$\boldsymbol{z = f(x, y)}$ と表す．M を $f(x, y)$ の**定義域**という．
- $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in M\}$ を関数 $f(x, y)$ の**グラフ**という．2変数関数のグラフは一般的に $\mathbb{R}^3$ 内の曲面である．

まとめ2（2変数関数の極限）

- $\mathbb{R}^2$ の点 $\mathrm{P}(a, b)$ に対して，$U_\varepsilon(\mathrm{P}) = \left\{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\right\}$ を P の $\boldsymbol{\varepsilon}$ **近傍**という．
- $f(x, y)$ は点 $\mathrm{P}(a, b)$ の近傍 $U_\varepsilon(\mathrm{P})$ の P 以外，つまり $U_\varepsilon(\mathrm{P}) \backslash \{\mathrm{P}\}$ で定義されているとする（P (a, b) で定義されている必要はない）．
- 点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとき，$f(x, y)$ が一定の値 l に限りなく近づくならば

  (x, y) が (a, b) に近づくとき，$f(x, y)$ の**極限値**は l である

  といい，

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l, \quad f(x, y) \to l \quad (\text{as } (x, y) \to (a, b))$$

  などとかく．
- $\varepsilon - \delta$ 式の定義は次の通りである：

  任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

  $$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

  が成り立つ．
- 次が成り立つ：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = m$ の時

  (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = l + m$

  (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = lm$ 特に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x, y) = cl$ (c は定数)

  (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{l}{m}$ (ただし $m \neq 0$)

まとめ 3（関数の連続性）

- 関数 $f(x,y)$ に対して

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

  が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**連続である**という．

- $\varepsilon-\delta$ 式定義は次の通りである：$f(x,y)$ が $M \subset \mathbb{R}^2$ で定義されており，$(a,b) \in M$ で連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x,y) \in M,\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．

- $f(x,y)$ が M 上の各点で連続であるとき，$f(x,y)$ は M で**連続である**という．

まとめ 4（有界・開集合・閉集合）

$M \subset \mathbb{R}^2$ とする．

- ある $R > 0$ があって $M \subset U_R(\mathrm{O})$ （O は原点）とできるとき M は**有界**であるという．

- M の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対してある $\varepsilon > 0$ があって，$U_\varepsilon(\mathrm{P}) \subset M$ とできるとき，M は**開集合**であるという．

- $M = G^c$ （G ：開集合）と書けるとき，M は**閉集合**であるという．

- **Weierstrass の最大値定理**：有界な閉集合 M で定義された連続関数は M で最大値と最小値をとる．

演習 1

次の極限値が存在するかどうか調べよ．存在するときは極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

証明

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{2r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = 2r\cos^2\theta\sin\theta$$

より

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| = |2r\cos^2\theta\sin\theta| \leq 2r$$

$(x,y)\to(0.0)$ は $r\to 0$ と同じことなので $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$ である．

注 $\varepsilon - \delta$ 式には

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 2r$$

より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \varepsilon/2$ とすれば,（$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ だから）

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 2r < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つ．よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$ が成り立つ．

(2)

同じように考えると $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ である．r がなく θ だけ $\to \theta$ により値が異なる $\to$ 極限値が存在しないのでは?

- 直線 $y = x$ 上（原点以外）では $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$ なので，直線 $y = x$ に沿って $(0,0)$ に近づけると 0 に近づく．
- 直線 $y = 0$ 上（原点以外）では $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$ なので，直線 $y = 0$ に沿って $(0,0)$ に近づけると 1 に近づく．

以上より極限値は存在しない．

注

- 極限値が存在しないことを示すには，2 通りの近づけ方で異なる値に近づくことを示せばよい．

- 極座標で表したとき，$r \to 0$ のとき $g(r) \to 0$ となる r だけの関数を用いて

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq g(r)$$

のような不等式が作れてやっと $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ と結論づけられる．極座標を用いて $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を証明するためには上のような不等式を必ず作る．

演習 2

次の関数は点 $(0,0)$ で連続であるか

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{解}}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べる．

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $r \neq 0$ のとき

$$xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = r^2\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{r}$$

であり，$\left|\sin\dfrac{1}{r}\right| \leq 1$ より

$$\left|xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq r^2$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき $r \to 0$ であるから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

つまり

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

である．よって $(0,0)$ で連続である．