2026年度　解析Ⅲ演習（担当：松澤　寛）　プリント No.11

学科（コース）・プログラム＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $D = \{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ を求めたい．以下の問に答えよ．

(1) D の近似増加列 $D_n = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ に対して $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ を極座標変換を用いて求めよ（領域 D と D_n も図示せよ）．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を求めよ．

2. $D = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とするとき広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} dxdy$ を求めたい．以下の問に答えよ．

(1) $D_n = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq n^2\}$ であるとき，極座標変換により二重積分 $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} dxdy$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} dxdy$　の値を求めよ．

3. ガンマ関数とベータ関数の関係式 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ の別の証明について以下の手順で示せ．

(1) $\Gamma(p)\Gamma(q)$ は $D = \{(x,y) | x > 0,\ y > 0\}$ とすると

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy\right) = \iint_D f(x,y) dxdy$$

と書ける．$f(x,y)$ を答えよ．

(2) 変数変換として $u = x + y,\ uv = x$ とおく．この変数変換を $x =,\ y =$ の形であらわせ．

(3) 上の変数変換により D と対応する uv 平面の領域 E を集合の形で書き，図示せよ．

(4) この変数変換についてのヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(5) (1) で求めた $\displaystyle\iint_D f(x,y) dxdy$ はこの変数変換により $\displaystyle\iint_E g(u,v) dudv$ となる．$g(u,v)$ を求めよ．

(6) (5) で求めた $\displaystyle\iint_E g(u,v) dudv$ を累次積分になおすことにより $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ を導け．

4. 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\log\frac{1}{x}}\, dx$ について $t = \sqrt{\log\dfrac{1}{x}}$ 置換し，ガンマ関数を用いて値を求めよ．(Hint: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)