

2025年度 芝浦工業大学 関数解析II/解析学III (担当: 松澤 寛)
自己チェックシート No.03

学科 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 合成積に関する Young の不等式を述べよ. 合成積の定義や定義される条件も含めて書きなさい.
2. $f, g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ で $\text{supp} f \subset B_R(0)$, $\text{supp} g \subset B_{R'}(0)$ であるとき, $\text{supp}(f * g) \subset B_{R+R'}(0)$ であることを示せ ($|x| \geq R + R'$ ならば $(f * g)(x) = 0$ であることを示せばよい).
3. $\{\rho_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ が正則化列であるとは?
4. $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) f は $x = 0$ で連続であることを示せ.
 - (2) f は $x = 0$ で微分可能であることを示し, $f'(x)$ を x の式で, 場合分けを使い, 表せ.
 - (3) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.
 - (4) $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, $f''(x)$ を x の式で, 場合分けを用い, 表せ.
 - (5) $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.
5. 正則化列を用いた証明で Ω_n という集合が出てきました. これについて理解を確かめる問題です.
- (1) $A \subset \mathbb{R}^N$ に対して $\text{dist}(x, A)$ の定義を述べよ.
 - (2) A の閉包 \bar{A} の定義を述べよ.
 - (3) $\text{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ を示せ.
 - (4) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とするとき $x \in \Omega$ ならば $\text{dist}(x, \Omega^c) > 0$ であることを示せ.
 - (5) $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < n, \text{dist}(x, \Omega^c) > 2/n\}$ とするとき
 - (i) $\Omega_n \subset \Omega$ を示せ.
 - (ii) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ を示せ.
 - (iii) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ を示せ.
6. $I \subset \mathbb{R}$ を开区間とし, $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ とする. $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$ が f の弱微分であることの定義を述べよ.
7. a, b, c は $a < b < c$ を満たすとし, $f_1(x) \in C^1((a, c)) \cap C([a, c])$, $f_2 \in C^1((c, b)) \cap C([c, b])$ は次を満たすとす.
- (i) $f_1(c) = f_2(c)$
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow a+0} f_1'(x)$, $\lim_{x \rightarrow c-0} f_1'(x)$, $\lim_{x \rightarrow c+0} f_1'(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f_2'(x)$ が存在する.

このとき $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (a \leq x \leq c) \\ f_2(x) & (c < x \leq b) \end{cases}$$

とすると $f \in L^1_{\text{loc}}(a, b)$ である (これは証明不要). このとき f の弱微分 f' は

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) & (a < x < c) \\ f'_2(x) & (c < x < b) \end{cases}$$

で与えられることを示せ (a.e. で定義されていればいいので $x = a, b, c$ で定義されていなくて ok).