

2025 年度 芝浦工業大学 関数解析 II/解析学 III (担当: 松澤 寛)
自己チェックシート No.02

学科 学籍番号 _____ 氏名 _____

0. (講義では触れませんが) 空でない集合 X と X の部分集合からなる σ -加法族 $\mathcal{F}$, 測度 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ の組 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間という. $\mathcal{F}$ が σ -加法族であること, μ が測度であることの定義を述べよ.
1. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $1 \leq p < \infty$ に対して $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ の定義を述べよ. そこでノルムを定義しようとしたときに生じる問題点を述べよ.
2. Young の不等式を述べ, 証明せよ (増減表を用いて).
3. Hölder の不等式を述べよ.
4. Minkowski の不等式を述べよ.
5. $\mu(X) < \infty$ とする. $1 \leq p \leq q < \infty$ ならば $\mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ であり

$$\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{1/q} \quad (\forall f \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu))$$

を示せ. Hint: $f \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu)$ とすると $|f|^p \in \mathcal{L}^{q/p}(X, \mathcal{F}, \mu)$ である. $\left(\frac{q}{p}\right)' = \left(1 - \frac{p}{q}\right)^{-1}$ であることに注意して, $|f|^p$ と $g(x) = 1$ に Hölder の不等式を使う.

6. 集合 $\mathcal{X}$ において関係 $\sim$ が同値関係であることの定義を述べよ.
7. $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ から $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ はどのように構成しますか? また, $L(X, \mathcal{F}, \mu)$ のノルムはどのように定めますか?
8. $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ の定義を述べよ. また, $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F})$ からどのように構成しますか?
9. $\mathbb{R}^N$ の開集合 Ω で定義された連続関数 f の台とは何か.
10. Ω を $\mathbb{R}^N$ の開集合とするとき $C_c(\Omega)$ の定義を述べよ.
11. 変分法の基本補題を述べよ.