

2025 年度 芝浦工業大学 関数解析 II/解析学 III (担当: 松澤 寛)
自己チェックシート No.01

学科 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 X において定義された $\|\cdot\|$ がノルムであることの定義を述べよ.
2. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立つことを証明せよ.
3. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列ことの定義を述べよ.
4. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるとき, 有界であること, つまり, ある $M > 0$ が存在して $\|x_n\| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つことを証明せよ.
5. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が Banach 空間であることの定義を述べよ.
6. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間, $T: X \rightarrow Y$ を線形作用素とする. T が有界であることの定義を述べよ.
7. 6 において T が有界であるとき, T の作用素ノルム $\|T\|$ の定義を述べよ.
8. H を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. $(\cdot, \cdot)$ が H 上の内積であることの定義を述べよ.
9. H を内積 $(\cdot, \cdot)$ を内積とする内積空間とする. 以下の問いに答えよ.
 - (1) Schwartz の不等式を述べよ.
 - (2) 内積 $(\cdot, \cdot)$ から導かれるノルム $\|\cdot\|$ はどのように定義されますか?
 - (3) (2) のノルムにより $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ ($n \rightarrow \infty$) を示せ.
 - (4) 中線定理を述べよ.
 - (5) この内積空間が Hilbert 空間であることの定義を述べよ.
10. 射影定理を述べよ.
11. Riesz の表現定理を述べよ.
12. H を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ Hilbert 空間, f を H 上の有界線形汎関数, $T: H \rightarrow H$ を有界線形作用素とする. このとき $g(x) = f(Tx)$ とおくと, $g(x) = (x, y)$ ($x \in H$) を満たす $y \in H$ がただ1つ存在することを示せ.