2025 年度　関数解析学（担当：松澤　寛）　自己チェックシート　No.7-8

学科（コース）・プログラム__________　学籍番号____________　氏名________________

$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を K とする．

1. X が K 上のベクトル空間であるとき，$x \in X$ に対して，実数 $\|x\|$ が定められているとする．$\|x\|$ がノルムであること（つまり $(X, \|\cdot\|)$ がノルム空間であること）の定義を述べよ．また，ノルム空間においてノルムから距離をどのように定義すれば距離空間となりますか？

2. $(X, \|\cdot\|)$ が K 上のノルム空間であるとき $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ $(x, y \in X)$ を証明せよ．

3. $(X, \|\cdot\|)$ が K 上のノルム空間であるとき，X の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ．

4. ノルム空間 $(X, , \|\cdot\|)$ が Banach 空間であることの定義を述べよ．

5. $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を K 上のノルム空間とするとき，$X \times Y$ は次のように定義される：

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

また，和を $(x_1, y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$，スカラー倍を $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ で定義すると $X \times Y$ はベクトル空間となる（証明不要）．このとき (x, y) に対して

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

とすると $\|\cdot\|_{X \times Y}$ は $X \times Y$ はこのノルムに関してノルム空間となることを示せ．さらに X, Y が Banach 空間であれば $X \times Y$ も Banach 空間であることを示せ．

6. Young の不等式を述べよ．

7. $p,\, q > 1$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとき，

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \quad (x \geq 0)$$

が成り立つことを (Young の不等式を用いずに) 証明せよ．

8. 数列についての Hölder の不等式，Minkowski の不等式を述べよ．

9. 数列空間 c, c_0, $l^p (1 \leq p < \infty)$, l^∞ の定義をそのノルムとともに述べよ．

10. (Hölder の不等式の 3 つ ver) $p,\, q,\, r > 0$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$ を満たすとする．また，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^r < \infty$$

を満たすとする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n y_n z_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^r \right)^{1/r}$$

が成り立つことを示せ．普通の Hölder の不等式は用いてよい．

Hint 1: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |y_n z_n|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$ であることを普通の場合の Hölder の不等式で示す．その際 $\dfrac{p}{(p-1)q} + \dfrac{p}{(p-1)r} = 1$ つまり $\dfrac{1}{\frac{p-1}{p}q} + \dfrac{1}{\frac{p-1}{p}r} = 1$ に注意する．

Hint 2: $\dfrac{1}{q_1} = 1 - \dfrac{1}{p}$ とすると上の事実から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |y_n z_n|^{q_1} < \infty$ であるから $|x_n y_n z_n|$ を $|x_n||y_n z_n|$ とみて Hölder の不等式を使う．