2025年度　関数解析学（担当：松澤　寛）　自己チェックシート　No.05-06

学科（コース）・プログラム__________　学籍番号____________　氏名________________

1. 距離空間 (X,d) の部分集合 $A(\neq\emptyset)$ 定義された実数値関数 f が A 上一様連続であることの定義を述べよ．

2. 集合 E で定義された実数値関数の列 $\{f_n\}$ が E 上で定義された関数 f に E 上一様収束することの定義を述べよ．

3. $I=[a,b]$ で定義された実数値連続関数の列 $\{f_n\}$ が I 上で定義された関数 f に I 上一様収束するならば f は I で連続であることを証明せよ（もう一度講義資料を真似て書いてみよ）．

4. $[0,1]$ 上で $f_n(x)=x^n(1-x)$ で定義される関数列 $\{f_n\}$ を考える．以下の問いに答えよ．
   (1) $f_n(x)$ の $[0,1]$ 上での最大値を求めよ．
   (2) f_n は $f=0$ に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ．Hint:$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\to e^{-1}(n\to\infty)$

5. Let (X,d) be a metric space and let $A\subset X$ be a nonempty subset. Define the distance from a point to the set by

$$\mathrm{dist}(x,A):=\inf_{y\in A}d(x,y).$$

   (1) Prove that

$$\mathrm{dist}(x,A)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\overline{A}.$$

   (2) Prove that for any $x,y\in X$,

$$\left|\mathrm{dist}(x,A)-\mathrm{dist}(y,A)\right|\le d(x,y),$$

   and deduce that the function $x\mapsto\mathrm{dist}(x,A)$ is **uniformly continuous**.

   (3) Let $A,B\subset X$ be **disjoint closed subsets**, i.e., $A\cap B=\emptyset$. Construct a continuous function $f:X\to[0,1]$ such that

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\in B).\end{cases}$$

   解答は日本語でよい．

6. 集合 $E(\subset\mathbb{R}^N)$ $(E\neq\emptyset)$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ が一様有界であることの定義を述べよ．

7. $E(\subset\mathbb{R}^N)$ $(E\neq\emptyset)$ て定義された関数の列 $\{f_n\}$ が同程度一様連続であることの定義を述べよ．

8. 次の問に答えよ．
   (1) 区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が，ある $L>0$ が存在して

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le L|x-y|\quad({}^\forall n\in\mathbb{N},\ \ {}^\forall x,{}^\forall y\in I)$$

   が成り立つならば $\{f_n\}$ は同程度一様連続であることを確かめよ（任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を n に依存しなくどのようにとればいい？）

(2) $I=[a,b]$ とする．$I\subset J$ なる開区間 J で定義された関数列 $\{f_n\}$ が各 $n\in\mathbb{N}$ に対して f_n は J で微分可能で, f_n' は J で連続とする．さらに，ある $L>0$ が存在して $|f_n'(x)|\le L$ がすべての $n\in\mathbb{N}$ と $x\in I=[a,b]$ に対して成り立つとする．このとき $\{f_n\}$ は同程度一様連続であることを示せ.（Hint: $[a,b]$ 上で f_n' は連続であるから，微積分の基本定理から

$$f_n(x)-f_n(y)=\int_y^x f_n'(t)dt,\quad |f_n(x)-f_n(y)|=\left|\int_y^x f_n'(t)dt\right|$$

これを用いる．講義ノートの $e^{-|x|}$ がリプシッツ連続であることの証明を参考にせよ.）

9. Ascoli-Arzerá の定理を述べよ．

10. 問題 **8**(2) の条件を満たす関数列 $\{f_n\}$ がさらに，$f_n(a)=0$ $(n=1,2,\dots)$ を満たすならば，$\{f_n\}$ は $[a,b]$ 上で一様収束する部分列をもつことを証明せよ（$\{f_n\}$ が一様有界であることを示せばよい．**7**(2) の Hint の式が役に立つかも）．