2025 年度　関数解析学（担当：松澤　寛）　自己チェックシート　No.01-02

学科（コース）・プログラム＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ における距離 d_2, d_1, d_∞ の定義を述べよ．

2. X を空でない集合としたとき，d が X 上の距離であることの定義を述べよ．

3. 離散距離とは何ですか？離散距離が距離の 3 つの条件を満たすことを確かめよ．

4. (X, d) を距離空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ は単調増加関数であることを示せ．

(2) $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ とおくとき，(X, ρ) も距離空間となることを証明せよ．

5. 講義で紹介した $C([0, 1])$ の距離を 2 つ述べよ．

6. (X, d) を距離空間とし，$A \subset X$ ($A \neq \emptyset$ とする) $x \in X$ が A の内点，触点，境界点であることの定義を述べよ．また，A の内部 · 閉包の定義を述べよ．

7. (X, d) を距離空間とする．$A \subset X$ は空でないとする．A が開集合 · 閉集合であることの定義を述べよ．

8. (X, d) を距離空間とする．任意の $x_0 \in X$ と $r > 0$ に対し，$B_r(x_0)$ は開集合であることを証明せよ（すべての $x \in B_r(x_0)$ に対し x が $B_r(x_0)$ の内点であることを示す）．

9. (X, d) を距離空間とし，$\mathcal{O}$ を (X, d) の開集合全体，$\mathcal{F}$ を (X, d) の閉集合全体とする．このとき $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$ の授業で扱った性質をもう一度書きなさい．

10. (X, d) を距離空間，$A \subset X$ を空でないとする．A が X で稠密であることの定義を述べよ．

11. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が a に収束することの厳密な定義（ε と n_0 を用いる定義）を述べよ．

12. 距離空間 (X, d) の空でない集合 A について $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件を点列を用いて述べよ．

13. (X, d) を距離空間とし，$A \subset X$ を空でないとする．A が閉集合であることの必要十分条件を点列を用いて述べよ．

14. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．f が $x_0 \in X$ で連続であることの定義を $\varepsilon - \delta$ 式に述べよ．

15. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．f が $x_0 \in X$ で連続であることための必要十分条件を点列を用いてを述べよ．

16. $\mathbb{R}^N$ において距離 d_1, d_2 を考える．以下の問に答えよ．

(1) 講義資料 p.37 問 2 の不等式のうち $\dfrac{1}{N} d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を証明せよ．

- (左側の $\leq$ の Hint) $|x_i - y_i| = \sqrt{|x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots |x_N - y_N|^2} = d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ なので $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_N - y_N| \leq ?$

– (右側の $\leq$ の Hint) $a_1, \ldots, a_N \geq 0$ ならば $\sqrt{a_1 + \cdots + a_N} \leq \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_N}$

(2) 距離 d_1 を用いた場合の開球を $B_r^1(\boldsymbol{x})$, 距離 d_2 を用いた場合の開球を $B_r^2(\boldsymbol{x})$ とする．このとき上の不等式から次の包含関係を示せ．

$$B_\varepsilon^1(\boldsymbol{x}) \subset B_\varepsilon^2(\boldsymbol{x}) \subset B_{N\varepsilon}^1(\boldsymbol{x})$$

(3) $A \subset \mathbb{R}^N$ は空集合でないとする．このとき $\boldsymbol{x} \in A$ が距離 d_2 を用いて内点であるならば距離 d_1 を用いても内点であることを証明せよ．その逆も証明せよ．