

2025 年度 微分方程式Ⅱ（担当：松澤 寛） 自己チェックシート No.3

学科（コース）・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. コーシー・リプシッツの定理を連立微分方程式のバージョンで書きなさい.
2. コーシー・リプシッツの定理の連立微分方程式のバージョンを証明する場合, Step 1 から Step 6 をそのバージョンに合わせた形で書きなさい (証明はしなくていいです).
3. 次の連立微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -1$$

についてコーシー・リプシッツの定理の証明で出てくる連立積分方程式に直しなさい. また, その証明で定義される $\mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \end{pmatrix}$ に関する漸化式を作り, $\mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \mathbf{y}_3(x)$ を求めよ.

4. グロウンウォルの補題を述べよ.
5. 次の, より一般のグロウンウォルの補題示せ: $f = f(x), g = g(x), h = h(x)$ を $[a, b]$ で定義された連続関数で $h(x) \geq 0$ on $[a, b]$ とする. このとき

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x f(t)h(t)dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

を満たすならば

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x g(t)h(t)e^{\int_t^x h(s)ds}dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

が成り立つことを示せ. (Hint: $[a, b]$ 上の連続関数 a に対して $e^{-\int_a^x a(r)dr}$ を x で微分するとどうなるかな?)

6. 微分方程式の解のパラメータに関する連続依存性に関する定理について講義や資料を見返して書きなさい.