

2025 年度 微分方程式Ⅱ（担当：松澤 寛） 自己チェックシート No.02

学科（コース）・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. $I \subset \mathbb{R}$ とする. I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に各点収束することの定義を述べよ.
2. $I \subset \mathbb{R}$ とする. I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ.
3. $I \subset \mathbb{R}$ とする. I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が Cauchy の条件を満たすとは?
4. $I \subset \mathbb{R}$ とする. I 上の関数 $f(x)$ が $x = x_0 \in I$ で連続であることの $\varepsilon - \delta$ 式定義を述べよ.
5. I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に一様収束するとき $f(x)$ は I で連続であることを示せ.
6. 一様収束について $\lim$ と積分記号が交換できることの定義を講義でやりました. 正確な主張をもう一度書きなさい.
7. 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が一様収束することの定義を述べよ (必要であると思われるものは全て準備せよ).
8. ワイエルシュトラスの M-テストを述べよ.
9. $[0, 1]$ 上の関数列 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ について以下の問に答えよ.
 - (1) $\{f_n(x)\}$ は $[0, 1]$ 上ある関数 $f(x)$ に各点収束する. $f(x)$ を求めよ (Hint: $|r| < 1$ ならば $nr^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)).
 - (2) $f_n(x) - f(x)$ の $[0, 1]$ 上の最大値を求めよ.
 - (3) $\{f_n(x)\}$ は $[0, 1]$ 上 $f(x)$ に一様収束しないことを示せ (Hint: $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow e^{-1}$ ($n \rightarrow \infty$)).
10. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$ を $\mathbb{R}$ 上で考える. 連続関数列 $\{f_n(x)\}$ はある関数 $f(x)$ に各点収束する. $f(x)$ を見るにより, $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束しないことを示せ.
11. 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n\sqrt{n}}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ. ただし $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束する α の条件は証明せずに用いてよい.
12. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とは何か.
13. 次のべき級数の収束半径を求めよ. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$
14. べき級数の微分積分に関する命題を講義資料から抜き出し, 書きなさい.
15. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$) で成り立つ. 以下の問いに答えよ.
 - (1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ が $|x| < 1$ で表す関数を求めよ.
 - (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ が $|x| < 1$ で表す関数を求めよ.