2022年度　複素関数論 I（担当：松澤　寛）　自己チェックシート　No.08–09

学科（コース）・プログラム＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ の原始関数とは何か？ $f(z)$ の原始関数 $F(z)$ が存在するとき，$f(z)$ 複素積分についてどのようなことが言えますか？

2. Cauchy の積分定理を述べよ．

3. Cauchy の積分定理から導かれる積分路の変更に関する事実を述べよ．

4. Green の定理を述べよ．

5. Cauchy の積分定理を Green の定理を用いて証明を行ったが，問題点がある．それを述べよ．

6. Cauchy の積分公式とその微分形を述べよ．

7. Cauchy の積分公式を用い，次の複素積分を計算しなさい．曲線も図示せよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+1}dz \quad C : |z| = 2$ (Hint: $z^2+1=(z+i)(z-i)$ と因数分解して部分分数分解せよ．

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz \quad C : |z| = 3$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-3)}dz \quad C : |z| = 1$ （Hint: 正則でない点がどこかをちゃんと見よう）

8. 次の問いに答えよ．

(1) z^2+4z+1 を複素数の範囲で因数分解せよ．

(2) C を原点中心，半径 1 の円とするとき，Caucy の積分定理を用いて

$$\int_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

を求めよ (Hint: $z^2+4z+1=0$ の解のうち C の内部にあるのを α とすると？ $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+1}=\dfrac{g(z)}{z-\alpha}$ ($g(z)$ は C の週およびその内部で正則) の形にする．))

(3) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}+4e^{i\theta}+1}=\dfrac{1}{2(\cos\theta+2)}$ を証明せよ．(Hint: $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$ を使うため分母分子を？)

(4) (2) の複素積分を C のパラメータ表示 $C : z = e^{i\theta}(0 \le \theta \le 2\pi))$ を用いて θ の積分にし，(3) も用いて

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$$

の値を求めよ．